

- 1) **Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = k)$**
51,4% aller Neugeborenen sind Knaben. Eine Familie hat sechs Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau drei Knaben und drei Mädchen sind?
- 2) **Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit: $P(X \leq k)$**
Ein Tetraederwürfel trägt die Zahlen 1 bis 4. Wird er geworfen, so zählt die unten liegende Zahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim fünffachen Werfen des Würfels höchstens zweimal die Zahl 2 zu werfen?
- 3) **Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit: $P(X \geq k)$**
Ein Biathlet trifft die Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Er gibt insgesamt zehn Schüsse ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mindestens achtmal?
- 4) **Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit: $P(k \leq X \leq m)$**
Aus einer Urne mit zehn roten und fünf weißen Kugeln werden acht Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man vier bis sechs rote Kugeln?
- 5) **Anwendung der Formel für das Gegenereignis: $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$**
Wirft man einen Reißnagel, so kommt er in 60% der Fälle in Kopflage und in 40 % der Fälle in Seitenlage zur Ruhe. Jemand wirft zehn dieser Reißnägeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mehr als dreimal die Seitenlage?
- 6) **Bestimmung einer Mindestanzahl von Versuchen**
Wie oft muss ein Würfel mindestens geworfen werden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs fallen soll?
- 7) Nach Angaben der Post erreichen 90 % aller Inlandbriefe den Empfänger am nächsten Tag. Johanna verschickt acht Einladungen zu ihrem Geburtstag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
 - a) sind alle Briefe am nächsten Tag zugestellt?
 - b) sind mindestens sechs Briefe am nächsten Tag zugestellt?
- 8) Max gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ beim Squash gegen Karl.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Max genau sechs von zehn Spielen?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er mindestens sechs von zehn Spielen?
 - c) Wie viele Spiele sind mindestens erforderlich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Karl mindestens ein Spiel gewinnt, mindestens 99 % betragen soll?

M13

1) $n = 6$ $k = 3$ $p_{\text{Knaben}} = 0,514$ $P(X = 3) = \binom{6}{3} \cdot 0,514^3 \cdot 0,486^3 \approx 0,3118$

2) $n = 5$ $k \leq 2$ $p = 0,25$ $P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^2 \binom{5}{i} \cdot 0,25^i \cdot 0,75^{5-i} \approx 0,8965$

3) $n=10$ $k \geq 8$ $p=0,8$ (Scheibe getroffen)
 $P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 + 0,8^{10} \approx 0,6778$

4) $n=8$ $k=4,5,6$ $p = \frac{2}{3}$ (rote Kugel) $P(4 \leq X \leq 6) = \sum_{i=4}^6 \binom{8}{i} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8-i} \approx 0,7170$

5) $n=10$ $k > 3$ $p=0,4$ (Seitenlänge)
 $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$
 $= 1 - \sum_{i=0}^3 \left(\binom{10}{i} \cdot 0,4^i \cdot 0,6^{10-i} \right)$
 $\approx 0,6178$

6) $p = \frac{1}{6}$ $P(\text{keine 6 bei } n \text{ Würfeln}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$
 $P(\text{mindestens eine 6 bei } n \text{ Würfeln}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1 \quad n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 12,63$

7) E: "Brief am nächsten Tag zugestellt", $P(E) = 0,9$ $n = 8$

a) $k = 8$ $B(8; 0,9; 8) = \binom{8}{8} \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^0 = 0,9^8 = 0,4305$

b) $k = 6, 7, 8$ $\sum_{i=6}^8 B(8; 0,9; i) \approx 0,9619$

8) $n=10$ $k=6$ $p = \frac{2}{3}$ (Max gewinnt) $P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0,2276$

- 1) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Trefferzahl X in einer Bernoullikette mit den Parametern n und p .
 - a) $n = 12, p = 0,4$
 - b) $n = 125, p = 0,2$
 - c) $n = 37400, p = 0,95$.

- 2) Pollen können Heuschnupfen auslösen. Ein Nasenspray wirkt in 70 % aller Anwendungsfälle lindernd. 20 Patienten nehmen das Mittel gegen ihre Beschwerden ein.
 - a) Bei wie vielen Patienten ist eine Linderung zu erwarten?
 - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass exakt bei dieser erwarteten Anzahl unter den 20 Patienten das Mittel hilft?

- 3) Von einer binomialverteilten Zufallsgröße sind der Erwartungswert μ und die Standardabweichung g bekannt. Berechnen Sie die Parameter n und p der Verteilung,
 - a) $\mu = 5, g = 2$
 - b) $\mu = 225, g = 7,5$
 - c) $\mu = 7,2, \sigma = 1,2 \cdot \sqrt{2}$

- 4) Ein Autohersteller bestellt Scheinwerferlampen für sein Standardmodell, das schon länger hergestellt wird. Erfahrungsgemäß sind 4 % der Lampen fehlerhaft.
 - a) Wie viele fehlerhafte Lampen sind in einer Lieferung von 5000 Lampen zu erwarten? Geben Sie die Standardabweichung an.
 - b) Der Autohersteller benötigt im Mittel mindestens 6000 fehlerfreie Lampen. Wie viele Lampen soll er bestellen?

- 5) In einer Urne befinden sich 4 rote, 6 gelbe und 10 blaue Kugeln. Es werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln und die Zufallsgröße Y die Anzahl der gelben Kugeln unter den gezogenen Kugeln.
 - a) Sei $n = 8$.
Skizzieren Sie die zugehörige Binomialverteilung der Zufallsgröße X . Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X . Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet der tatsächliche Wert von X den Erwartungswert $E(X)$?
 - b) Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, damit der Erwartungswert der Zufallsgröße Y größer als 5 ist? Wie groß ist in diesem Fall die Varianz von Y ?
 - c) Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, damit der Erwartungswert von X mindestens gleich 1 ist?
 - d) Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, wenn mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel gezogen werden soll?

- 2 a) $n = 20$; $p = 0,7$
 X: Anzahl der Patienten, bei denen das Nasenspray lindernd wirkt
 $E(X) = np = 14$
- b) $P(X=14) = \binom{20}{14} \cdot 0,7^{14} \cdot 0,3^6 \approx 0,1916$
- 3 a) $\left. \begin{array}{l} \mu = 5 = n \cdot p \\ V(X) = 4 = n \cdot p \cdot (1-p) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V(X)}{\mu} = 1-p = \frac{4}{5} \Rightarrow p = \frac{1}{5}, n = 25$
- b) $\left. \begin{array}{l} \mu = 225 \\ V(X) = 56,25 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-p = 0,25 \Rightarrow p = 0,75, n = 300$
- c) $\left. \begin{array}{l} \mu = 7,2 \\ V(X) = 2,88 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-p = 0,4 \Rightarrow p = 0,6, n = 12$
- 4 a) $n = 5000$; $p = 0,04$; $E(X) = 200$; $V(X) = 192$; $\sigma(X) \approx 13,86$
- b) Der Stichprobenumfang n ist zu bestimmen, $p = 0,96$ (Lampe funktioniert).
 Ansatz: $n \cdot p \geq 6000 \Leftrightarrow n \geq 6250$
 Es sollten mindestens 6250 Lampen bestellt werden.
- 5 a) $n = 8$; $p = \frac{1}{5}$; $E(X) = \frac{8}{5}$; $V(X) = 1,28$; $\sigma \approx 1,13$
- $$P(X \geq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left(\left(\frac{4}{5}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 \right) \approx 0,4967$$
- b) $p = 0,3$; $n \cdot 0,3 > 5 \Leftrightarrow n > 16,67$
 Es müssen mindestens 17 Kugeln gezogen werden.
 Mit $n = 17$: $V(X) = 17 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 3,57$
- c) $p = 0,2$; $n \cdot 0,2 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 5$
 Es müssen mindestens 5 Kugeln gezogen werden.
- d) $P(\text{keine rote Kugel bei } n \text{ gezogenen}) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 $P(\text{mindestens eine rote Kugel unter } n \text{ gezogenen}) = 1 - 0,8^n$
 $1 - 0,8^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,1, n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 10,32$
 Es sind mindestens 11 Kugeln zu ziehen.

Alternativtest: Die Entscheidung zwischen zwei alternativen Hypothesen

Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeiten bei gegebener kritischer Zahl.

- 1) Ein Spieler besitzt gefälschte Münzen, bei welchen die Wahrscheinlichkeit p für Kopf auf 20% erniedrigt ist. Dem Spieler ist entfallen, ob die Münze in seiner Hosentasche fair oder gefälscht ist, und er testet sie daher durch 12 Probewürfe. Fällt dabei mehr als viermal Kopf, so stuft er die Münze als fair ein, andernfalls als gefälscht. Wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeiten?
- 2) Ein Gärtner übernimmt einen Posten von großen Behältern mit Blumensamen. Der Inhalt einiger Behälter ist zu 70% keimfähig, der Inhalt der restlichen jedoch nur zu 40%. Es ist aber nicht bekannt, um welche Behälter es sich jeweils handelt. Um dies festzustellen, wird jedem Behälter eine Stichprobe von 10 Samen entnommen und einem Keimversuch unterzogen. Geht mehr als die Hälfte der Samen an, wird dem Samen im entsprechenden Behälter eine Keimfähigkeit von 70% zugeordnet, andernfalls nur eine von 40%. Welche Irrtümer können auftreten, welche Konsequenzen haben diese Irrtümer und wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeiten?

Berechnung der kritischen Zahl bei gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit

- 3) Wie muss im Beispiel, bei sonst gleichen Voraussetzungen, das Entscheidungsverfahren abgeändert werden, damit eine faire Münze mit nicht mehr als 10% Wahrscheinlichkeit irrtümlich als gefälscht eingestuft wird?
- 4) Der Gärtner aus Aufgabe 2 strebt an, dass einem Behälter mit Samen niedriger Keimfähigkeit (40%) mit nur geringer Wahrscheinlichkeit α irrtümlich eine hohe Keimfähigkeit (70%) zugesprochen wird. Wie muss er seine Entscheidungsregel abändern, damit $\alpha \leq 5\%$ gilt?
Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich nun für die irrtümliche Zuordnung einer niedrigen Keimfähigkeit zu einem Behälter mit tatsächlich hoher Keimfähigkeit? Ist das Testverfahren brauchbar?

- 1) Ein Spieler besitzt gefälschte Münzen, bei welchen die Wahrscheinlichkeit p für Kopf auf 20% erniedrigt ist. Dem Spieler ist entfallen, ob die Münze in seiner Hosentasche fair oder gefälscht ist, und er testet sie daher durch 12 Probewürfe. Fällt dabei mehr als viermal Kopf, so stuft er die Münze als fair ein, andernfalls als gefälscht. Wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeiten?

Als alternative Hypothesen legen wir fest:

$$\begin{array}{ll} H_0: \text{Die Münze ist fair.} & H_0: p = 0,5 \\ H_1: \text{Die Münze ist gefälscht.} & H_1: p = 0,2 \end{array}$$

Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, mit der die Münze Kopf liefert.

Als Prüfgröße X wählen wir die Anzahl der Kopfwürfe bei 12 Probewürfen. Die Entscheidungsregel lautet:

$$\begin{array}{l} X > 4 \Rightarrow \text{Entscheidung für } H_0 \\ X \leq 4 \Rightarrow \text{Entscheidung für } H_1 \end{array}$$

X ist exakt binomialverteilt. Die Parameter sind

$$\begin{array}{l} n = 10 \text{ und } p = 0,5 \text{ falls } H_0 \text{ gilt, bzw.} \\ n = 10 \text{ und } p = 0,2, \text{ falls } H_1 \text{ gilt.} \end{array}$$

Faire Münze wird als gefälscht eingestuft:

$$\begin{aligned} P(\text{Fehler 1. Art}) &= P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) \\ &= P(X < 4), n = 12, p = 0,5 \\ &= F(12; 0,5; 4) \approx 0,1938 \\ &= 19,38\% \end{aligned}$$

Gefälschte Münze wird als fair eingestuft:

$$\begin{aligned} P(\text{Fehler 2. Art}) &= P_{H_1}(\text{Entscheidung für } H_0) \\ &= P(X > 4), n = 12, p = 0,2 \\ &= 1 - F(12; 0,2; 4) \\ &\approx 1 - 0,9274 \\ &= 0,0726 \\ &= 7,26\% \end{aligned}$$

- 2) Ein Gärtner übernimmt einen Posten von großen Behältern mit Blumensamen. Der Inhalt einiger Behälter ist zu 70% keimfähig, der Inhalt der restlichen jedoch nur zu 40%. Es ist aber nicht bekannt, um welche Behälter es sich jeweils handelt. Um dies festzustellen, wird jedem Behälter eine Stichprobe von 10 Samen entnommen und einem Keimversuch unterzogen. Geht mehr als die Hälfte der Samen an, wird dem Samen im entsprechenden Behälter eine Keimfähigkeit von 70% zugeordnet, andernfalls nur eine von 40%. Welche Irrtümer können auftreten, welche Konsequenzen haben diese Irrtümer und wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeiten?

X =Anzahl der keimfähigen Samen in der Stichprobe

p =Anteil der keimfähigen Samen im geprüften Behälter

Hypothesen

$$H_0: p = 0,4$$

$$H_1: p = 0,7$$

Entscheidungsregel

$$X \leq 5 \Rightarrow \text{Entscheidung für } H_0$$

$$X > 5 \Rightarrow \text{Entscheidung für } H_1$$

Fehler 1. Art

$$\alpha = P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1)$$

$$= P(X > 5), n = 10, p = 0,4$$

$$= 1 - F(10; 0,4; 5)$$

$$= 0,1662$$

$$= 16,6\%$$

Fehler 2. Art

$$\beta = P_{H_1}(\text{Entscheidung für } H_0)$$

$$= P(X \leq 5), n = 10, p = 0,7$$

$$= F(10; 0,7; 5)$$

$$= 0,1503$$

$$= 15,03\%$$

- 3) *Wie muss im Beispiel 1 bei sonst gleichen Voraussetzungen, das Entscheidungsverfahren abgeändert werden, damit eine faire Münze mit nicht mehr als 10% Wahrscheinlichkeit irrtümlich als gefälscht eingestuft wird?*

X =Anzahl der Kopfwürfe bei 12 Probewürfen

p =Anteil der Kopfwürfe

Hypothesen

H_0 : Die Münze ist fair

H_1 : Die Münze ist gefälscht

Fehler 1. Art

$\alpha = P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) \leq 0,1$

$\Rightarrow F(12;0,5;K) \leq 0,1$

aus der Tabelle wird entnommen

$F(12;0,5;3) = 0,073$

$F(12;0,5;4) = 0,1938$

daraus folgt, das $K=3$ geeignet ist.

Entscheidungsregel

$X > K \Rightarrow$ Entscheidung für H_0

$X \leq K \Rightarrow$ Entscheidung für H_1

Fehler 2. Art

$\beta = P_{H_1}(\text{Entscheidung für } H_0)$

$= P_{H_1}(X > 3)$

$= 1 - F(12;0,2;3)$

$= 1 - 0,7946$

$= 0,2054$

$= 20,54\%$

Der Fehler 2.Art steigt dabei jedoch auf 20,24% an.

- 4) *Der Gärtner aus Aufgabe 2 strebt an, dass einem Behälter mit Samen niedriger Keimfähigkeit (40%) mit nur geringer Wahrscheinlichkeit α irrtümlich eine hohe Keimfähigkeit (70%) zugesprochen wird. Wie muss er seine Entscheidungsregel abändern, damit $\alpha \leq 5\%$ gilt? Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich nun für die irrtümliche Zuordnung einer niedrigen Keimfähigkeit zu einem Behälter mit tatsächlich hoher Keimfähigkeit? Ist das Testverfahren brauchbar?*

X =Anzahl der keimfähigen Samen in der Stichprobe

p =Anteil der keimfähigen Samen im geprüften Behälter

Hypothesen

$H_0: p = 0,4$

$H_1: p = 0,7$

Entscheidungsregel

$X \leq K \Rightarrow$ Entscheidung für H_0

$X > K \Rightarrow$ Entscheidung für H_1

Fehler 1. Art

$\alpha = P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) \leq 0,05$

$\Rightarrow P(X > K) \leq 0,05, n=10, p=0,4$

$\Rightarrow 1 - F(10;0,4;K) \leq 0,05$

$\Rightarrow F(10;0,4;K) \geq 0,95$

aus der Tabelle entnimmt man, dass die Bedingung für $K=7$ erfüllt ist

Neue Entscheidungsregel

$K \leq 7 \Rightarrow$ Entscheidung für H_0

$K > 7 \Rightarrow$ Entscheidung für H_1

Signifikanztest: Eine Vermutung über einen Wert von p wird durch den Test bestätigt oder widerlegt.

Beispiel 1: Signifikanzniveau berechnen (k gegeben, Fehler 1. Art gesucht)

Ein Pharma-Hersteller hat ein neues Medikament gegen Schlaflosigkeit entwickelt. Das beste bereits auf dem Markt eingeführte Medikament mit vergleichbar geringen Nebenwirkungen zeigt in 50% der Anwendungsfälle eine ausreichende Wirkung. Erste Anwendungen lassen die Forscher die Hypothese aufstellen, dass das neue Medikament in einem noch größeren Anteil der Anwendungsfälle ausreichend wirkt. Dies soll in einer Studie an 50 Patienten überprüft werden. Die Forscher sind vorsichtig und legen fest, dass die Hypothese nur dann angenommen werden soll, wenn das Medikament bei mehr als 30 Patienten ausreichend wirkt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dem Medikament eine bessere Wirkung als dem alten Medikament zugesprochen, wenn dieser Sachverhalt in Wirklichkeit gar nicht zutrifft?

Lösung

p : Erfolgswahrscheinlichkeit des neuen Medikamentes

X : Anzahl der Patienten, bei welchen das Medikament ausreichend wirkt.

Es ist üblich, die Hypothese, von der man wünscht, dass sie verworfen wird, als Nullhypothese zu formulieren.

H_0 : Das neue Medikament ist nur genauso gut wie das alte Medikament.

$H_0 : p=0,5$

H_1 : Das neue Medikament ist besser als das alte.

$H_1: p>0,5$

Entscheidungsregel: $X \leq 30 \Rightarrow H_0$ wird angenommen
 $X > 30 \Rightarrow H_0$ wird verworfen

$$\begin{aligned}
 P(\text{Fehler 1. Art}) &= P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) \\
 &= P(X > 30), n=50, p = 0,5 \\
 &= 1 - P(X \leq 30) \\
 &= 1 - F(50; 0,5; 30) \\
 &= 1 - 0,9405 \text{ (Tafel)} \\
 &= 0,0595 \\
 &= 5,95\% \Rightarrow \text{Signifikanzniveau } \alpha = 5,95\%
 \end{aligned}$$

Beispiel 2: k berechnen (Signifikanzniveau gegeben)

Der Hersteller aus dem vorigen Beispiel verlangt, dass k so bestimmt werden soll, dass der Test ein 1%-Signifikanzniveau besitzen soll, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das neue Medikament zu Unrecht besser als das alte eingestuft wird, darf maximal 0,5% betragen.

Lösung

Test ist einseitig

$$n = 50; p=0,5; \quad \mu = n \cdot p = 25; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3,54 \text{ (Laplace-Bdg erf.)}$$

$$[\mu - 2,58 \cdot \sigma; \mu + 2,58 \cdot \sigma] \Rightarrow [16; 34]$$

Die Entscheidungsregel lautet daher:

Dem neuen Medikament wird eine bessere Wirksamkeit zugesprochen, wenn es bei mehr als 34 der 50 Patienten wirkt.