

Zufallsgrößen

Ordnet man den Ergebnissen eines Zufallsversuchs reelle Zahlen zu, so heißt diese Zuordnung Zufallsgröße oder Zufallsvariable X .

Beispiel: Werfen von 2 Würfeln

Zufallsgröße X = "Augensumme"

Mit $X=k$ wird ein Ereignis beschrieben

In der Regel läßt sich (tabellarisch) eine Verteilung der Zufallsgröße vornehmen.

Aufgaben

1. In einem Gefäß befinden sich 20 Kugeln, die von 1 bis 20 nummeriert sind. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X ="Anzahl der Primteiler".
2. Max und Klaus vereinbaren ein Würfelspiel: Zeigt der Würfel von Max eine kleinere Augenzahl als der Würfel von Klaus, dann muss Max an Klaus 2 € zahlen und umgekehrt. Zeigen beide Würfel die gleiche Augenzahl, so gewinnt keiner. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X ="Gewinn in € des Spieler Max in einer Spielrunde".
3. In einer Urne befinden sich 5 schwarze und 7 grüne Kugeln. Klaus zieht ohne Zurücklegen immer wieder ein Kugel, bis er zwei gleichfarbige Kugeln gezogen hat. Y sei die Anzahl der bis zu diesem Zeitpunkt gezogenen Kugeln. Ermitteln Sie die Verteilung der Zufallsgröße Y .

Zufallsvariable – Beispiel

Folgendes Spiel wird angeboten:

Ein Spieler nennt eine der Zahlen (1,2,3,4) und leistet 1 Euro Einsatz.

Ein mit den 4 Zahlen (1,2,3,4) beschriftetes Tetraeder wird viermal geworfen, wobei die unten liegende Zahl als geworfen gilt.

Für jeden Wurf, der die genannte Zahl zeigt, wird ein Euro gewonnen.

Ergebnis und Reingewinn

Jedem Ergebnis wird als Zufallsvariable der Reingewinn zugeordnet: $X = \text{"Reingewinn"}$
 Die 1 ist Gewinnzahl:

e_k	1111	1112	1113	...	1122	1123	...	1144
k	3	2	2	...	1	1	...	1

1222	1223	...	1444	2222	2223	...	4444
0	0	...	0	-1	-1	...	-1

Zusammenfassen

Alle Ergebnisse, denen dieselbe Zufallsvariable zugeordnet wird, werden zu einem Ereignis zusammengefasst:

X : "Die genannte Zahl wird k-mal geworfen."

Wahrscheinlichkeiten

Für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse gilt: (k: Gewinnzahl wird k-mal gezogen, usw.)

$$P(X=0) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 3^2}{4^4} = \frac{54}{256}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3^3}{4^4} = \frac{108}{256}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot 3}{4^4} = \frac{12}{256}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

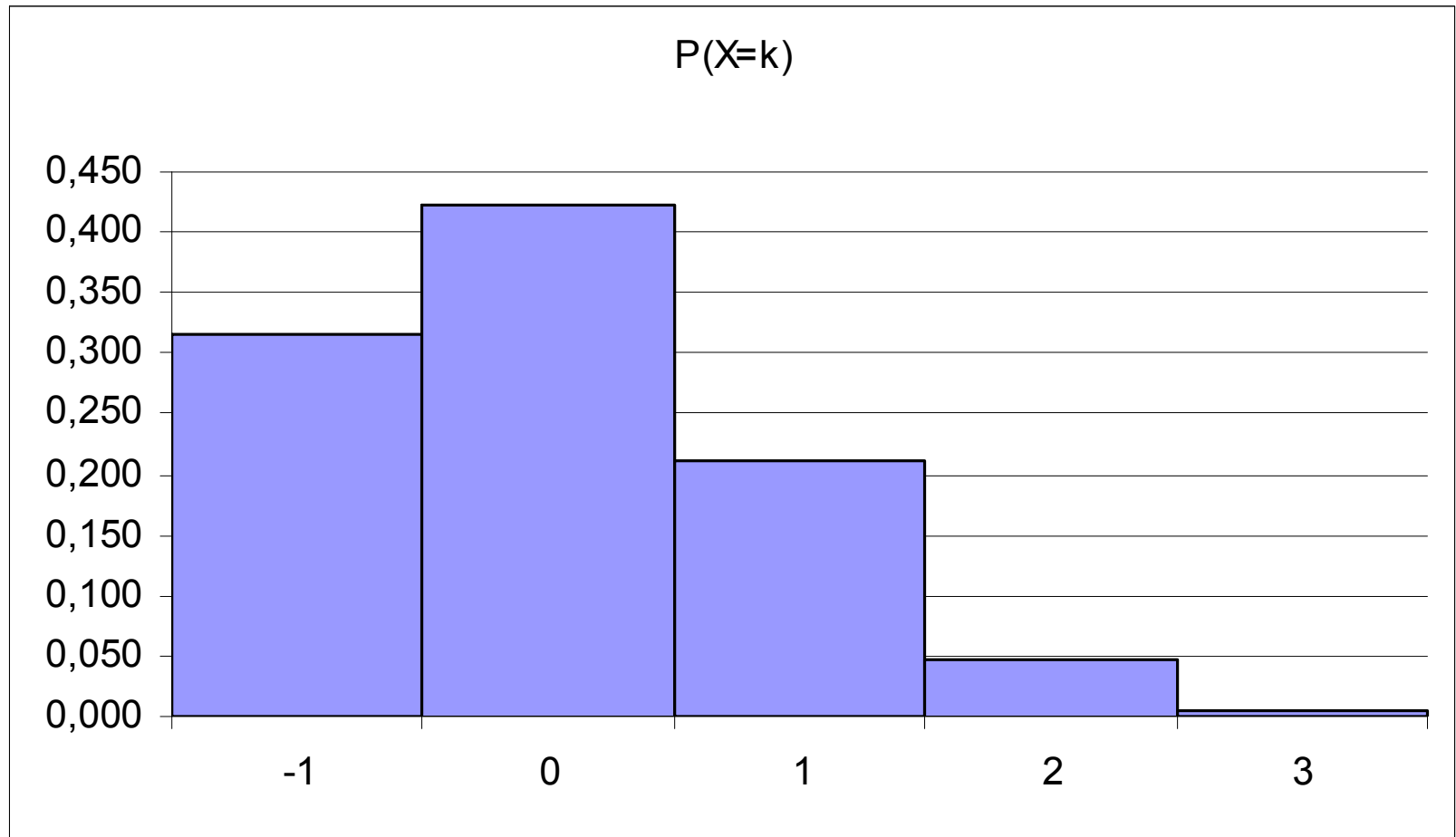
Ordnet man jedem Wert k , den die Zufallsgröße X annehmen kann, die jeweilige Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ zu, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X .

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$X = \text{"Reingewinn"}$

k	-1	0	1	2	3
$P(X=k)$ $=f(k)$	$81/256$	$108/256$	$54/256$	$12/256$	$1/256$

Säulendiagramm



Kumulierte Verteilung

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert in einem Intervall $[a,b]$ annimmt, so ist:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b f(k)$$

Intervalle werden danach unterschieden, ob die Intervallgrenzen zum Intervall gehören oder nicht. Eine Übersicht gebräuchlicher Intervallangaben, findet sich in der folgenden Tabelle:

Intervalle

Intervall symb.	x liegt im Intervall, wenn	Bezeichnung	Umgangssprachliche Beschreibung
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	abgeschlossen	mind. a und höchstens b
$[a, b [$	$a \leq x < b$	halboffen	mindestens a und kleiner b
$] a, b]$	$a < x \leq b$	halboffen	größer a und höchstens b
$] a, b [$	$a < x < b$	offen	größer a und kleiner b
$[a, \infty [$	$x \geq a$	nach oben unbeschränkt	mindestens a
$] a, \infty [$	$x > a$	nach oben unbeschränkt	größer a
$] -\infty , b]$	$x \leq b$	nach unten unbeschränkt	höchstens b
$] -\infty , b [$	$x < b$	nach unten unbeschränkt	kleiner b

Kumulierte Verteilung

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X \leq x_i) = F(x_i)$	0	81/256	189/256	243/256	255/256	1

Aufgaben

- (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich ein Gewinn von höchstens 1 Euro?
- (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich ein Gewinn von mehr als 0 und höchstens 2 Euro?
- (3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich ein Gewinn von mehr als 1 Euro?

Lösung 1

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= F(1) \\ &= 243/256 \\ &\approx 94,92\% \end{aligned}$$

Lösung 2

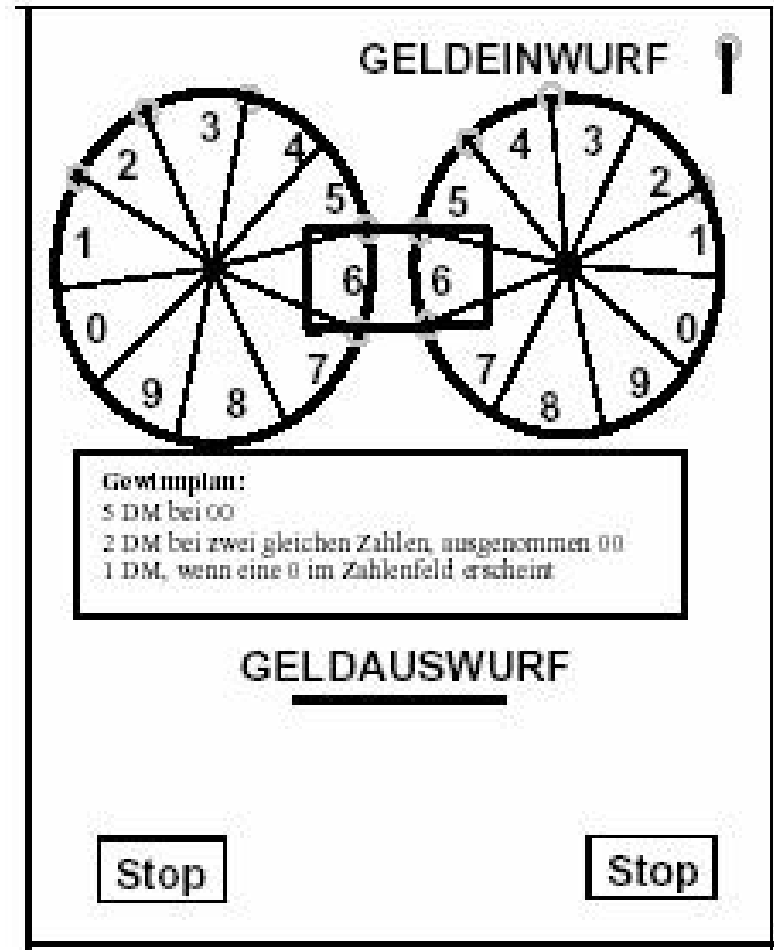
$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 2) &= P(X \leq 2) - P(X \leq 0) \\ &= F(2) - F(0) \\ &= 255/256 - 189/256 \\ &= 66/256 \\ &\approx 25,78\% \end{aligned}$$

Lösung 3

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - F(1) \\ &= 13/256 \\ &\approx 5,08\% \end{aligned}$$

Aufgabe

Sie sollen das Schulfest zum Ende des Jahres mit einem Glücksspielereignis bereichern. Der Glücksspielautomat hat folgendes Aussehen und steht ihnen kostenlos zur Verfügung. Die Schulleitung beauftragt sie, einen Einsatz pro Spiel festzulegen, mit dem sich das Glücksspiel finanzieren lässt und der die potentiellen Kunden nicht abschreckt.



Ergebnisse von 100 Spielen

Liste der 100 Ausspielungen:

97	20	67	72	08	83	22	81	50	90	15	86
88	37	56	17	35	24	32	14	04	16	33	14
00	35	55	05	84	70	50	78	13	49	57	44
02	57	26	12	81	89	97	38	88	39	32	36
75	65	49	39	16	65	24	98	72	18	42	83
28	12	07	57	14	74	39	94	40	18	59	93
34	58	61	47	02	89	75	33	68	66	61	62
19	36	71	44	33	54	70	25	26	02	94	25
44	11	48	55								

Auswertung: Definitionen

Zufallsvariable X:

"Reingewinn des Veranstalters pro Spiel"

Einsatz: a

$$k = \begin{cases} a-5 & \text{für } e \in \{(0,0)\} \\ a-2 & \text{für } e \in \{(i,i) \mid i=1,\dots,9\} \\ a-1 & \text{für } e \in \{(0,i);(j,0) \mid i,j=1,\dots,9\} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Statistik: Reingewinn

x_i	$a-5$	$a-2$	$a-1$	a
rel. H.	$1/100$	$13/100$	$14/100$	$72/100$

Reingewinn pro Spiel (**arithmetisches Mittel**)

$$= 1/100 * (a - 5) + 13/100 * (a - 2) + 14/100 * (a - 1) + 72/100 * (a)$$

$$= (a + 13a + 14a + 72a - 5 - 26 - 14) / 100$$

$$= (100a - 45) / 100$$

$$= a - 0,45$$

Gleichverteilung

Alle Ereignisse sind gleichwahrscheinlich!

x_i	$a-5$	$a-2$	$a-1$	a
$P(X=x_i)$	$1/100$	$9/100$	$18/100$	$72/100$
$P(X \leq x_i)$	$1/100$	$10/100$	$28/100$	1

Voraussage: Reingewinn

$$\begin{aligned} &= 1/100 * (a - 5) + 9/100 * (a - 2) \\ &\quad + 18/100 * (a - 1) + 72/100 * (a) \\ &= P(X=a-5) * (a-5) + P(X= a-2) * (a-2) \\ &\quad + P(X=a-1)*(a-1) + P(X=a) * a \\ &= (a + 9a + 18 a + 72a -5 - 18 - 18)/ 100 \\ &= (100a - 41)/ 100 \\ &= a - 0,41 \end{aligned}$$

Erwartungswert

Der Erwartungswert $E(X)$ ist der Mittelwert der Verteilung der Zufallsgröße X .

Man erhält $E(X)$, in dem man die einzelnen Werte der Zufallsvariablen mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet (multipliziert) und dann addiert:

$$E(x) = P(X=a-5) * (a-5) + P(X= a-2) * (a-2) \\ + P(X=a-1)*(a-1) + P(X=a) * a$$

*Auf lange Sicht ist bei diesem Spiel kein Gewinn zu erwarten.
Das Spiel ist fair.*

Def. Erwartungswert

Die Zufallsgröße X habe die Wertemenge $\{k_1; k_2; \dots; k_n\}$. Dann heißt die Zahl

$$E(X) := \mu := \sum_{i=1}^n k_i \cdot P(X = k_i)$$

Erwartungswert der Zufallsvariablen X .

Varianz

Die Werte k , die eine Zufallsgröße X bei der Durchführung eines Zufallsexperiments tatsächlich annimmt, streuen in der Regel mehr oder weniger um den Erwartungswert $\mu = E(X)$ der Zufallsgröße.

Varianz

Wichtig für das Streuungsverhalten einer Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert $\mu = E(X)$ sind die Abweichungen

$$|k_1 - \mu|, |k_2 - \mu|, \dots, |k_n - \mu|.$$

Man verwendet in der Praxis die Quadrate $(k_1 - \mu)^2, (k_2 - \mu)^2, \dots, (k_n - \mu)^2$.

Varianz

Multipliziert man die jeweilige quadratische Abweichung mit der Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens, also mit $P(X = k_i)$ und addiert diese Produkte, so erhält man das gesuchte Streuungsmaß, welches man auch als **Varianz $V(X)$** bezeichnet.

Varianz und Standardabweichung

Varianz:

$$V(X) = (k_1 - \mu)^2 \cdot P(X = k_1) + \dots + (k_n - \mu)^2 \cdot P(X = k_n)$$

Die Wurzel aus der Varianz $V(X)$ nennt man **Standardabweichung** der Zufallsgröße X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Bernoulli-Versuch

Ein **Bernoulli-Versuch** ist ein Zufallsversuch mit genau zwei möglichen Ergebnissen A und \bar{A} , die auch als *Erfolg* und *Misserfolg* bezeichnet werden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg sei $P(A) = p$; dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg $P(\bar{A}) = q = 1 - p$.

Bernoulli-Verteilung

Die **Bernoulli-Verteilung** ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X)$ einer Zufallsvariable X , die bei Erfolg den Wert 1 und bei Misserfolg den Wert 0 annimmt.

$$P(X) = \begin{cases} p & \text{für } X = 1 \\ 1 - p & \text{für } X = 0 \end{cases}$$

Bernoulli-Verteilung

Eine Bernoulli-Verteilung liegt u.a. für folgende Sachverhalte vor:

- *Fairer Wurf einer Münze mit $p=q=0,5$*
- *Beim Würfeln wird nur eine "6" als Erfolg gewertet: $p=1/6, q=5/6$.*
- *einmaliges Werfen einer präparierten Münze (Zahl oder Wappen)*
- *Geschlecht einer zufällig ausgewählten Person*
- *Funktionsfähigkeit einer zufällig ausgewählten Energiesparlampe*

Binomialverteilung - Beispiel

Beim Würfeln mit einem Würfel werde die Sechs als Erfolg gewertet; die Erfolgswahrscheinlichkeit ist also $p=1/6$, die Misserfolgswahrscheinlichkeit $q=5/6$. Gefragt sei nun nach der Wahrscheinlichkeit, in $n=5$ Würfeln genau $k=2$ Sechsen zu werfen.

Antwort

Die Wahrscheinlichkeit, erst zwei Sechsen, dann drei Nicht-Sechsen zu werfen ist p^2q^3 . Da es auf die Reihenfolge aber nicht ankommt, ist diese Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren mit der Anzahl der Möglichkeiten, zwei (ununterscheidbare) Sechserwürfe auf fünf Würfe zu verteilen. Diese Anzahl ist durch den Binomialkoeffizienten "2 aus 5" gegeben;
die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet also:

$$P(X=2) = \binom{5}{2} * 1/6^2 * 5/6^3 = 0,1607$$

Binomialverteilung

Verteilung einer Zufallsgröße X , welche die Anzahl k der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p darstellt.

Die Wahrscheinlichkeit, in n Bernoulli - Versuchen genau k - mal Erfolg zu haben, lautet :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Kumulierte Binomialverteilung

Summe der Wahrscheinlichkeiten der Trefferzahlen $0, 1, \dots, k$ in in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p

$$P(X \leq k) = F(n; p; k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i (1 - p)^{n-i}$$

Berechnung von Bernoulli-Wahrscheinlichkeiten

<i>Punktwahrscheinlichkeit</i>	$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
<i>Linksseitige Intervallwahrscheinlichkeit</i>	$P(X \leq k) = F(n; p; k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$
<i>Rechtsseitige Intervallwahrscheinlichkeit</i>	$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1) = 1 - F(n; p; k)$
<i>Intervallwahrscheinlichkeit</i>	$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

Erwartungswert

Für den Erwartungswert eines n-stufigen Bernoulli-Versuches mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gilt:

$$\mu = E(X) = n * p$$

Stichprobennahme

Ist das Verhältnis

$$\frac{\textit{Gesamtheit}}{\textit{Stichprobenumfang}}$$

sehr groß, dann ist ein näherungsweise Rechnen mit der Binomialverteilung zulässig.

Alternativtest - Beispiel

An einen Händler werden Schachteln mit sehr vielen Schrauben geliefert. Ein Teil davon enthält erste Qualität (nur 15% sind Ausschuss). Die restlichen Schachteln enthalten zweite Qualität (40% Ausschuß).

Alternativtest - Beispiel

Da versehentlich alle Kisten gleich aussehen und nicht gekennzeichnet sind, soll durch Entnahme von Stichproben getestet werden, welche Qualität jeweils vorliegt.

Festlegung eines Entscheidungsverfahrens

Einer der zu testenden Kiste werden zu diesem Zweck 20 Schrauben entnommen. Der Händler ist auf seinen Ruf bedacht und möchte keinesfalls, das 2. als erste Wahl verkauft wird. Deshalb legt er fest:

"Sind höchstens drei Schrauben Ausschuss, wird die Kiste als erste Wahl eingestuft, andernfalls als 2. Wahl."

Fehler

Bei diesem Verfahren sind Fehler nicht ausgeschlossen:

Der Händler möchte wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit bei diesem Verfahren ist, eine Kiste 2. Wahl als erste Wahl einzustufen

(1) Hypothesen

Unsere Hypothese für jede zu prüfende Kiste H_0 : Die Kiste ist 2. Wahl ($p=0,4$)

Alternativ gilt dann H_1 : Die Kiste ist 1. Wahl ($p=0,15$)

(2) Prüfgröße festlegen

Prüfgröße X :

"Anzahl der ausschüssigen Schrauben in der Stichprobe"

In einer Stichprobe von $n = 20$ Schrauben sind im Mittel 8 ausschüssige zu erwarten, aber es können zufallsbedingt auch nur 3 oder weniger sein.

Lösung Fehler

$$P(X \leq 3) = F(20; 0,4; 3) \approx 0,01596 \approx 1,6\%$$

Eine Kiste zweiter Wahl wird also nur selten, nämlich in 1,6% der Fälle für 1. Wahl gehalten.

Weiterer Fehler

Eine Kiste 1. Wahl kann irrtümlich als 2. Wahl eingestuft werden. Dies erfolgt, wenn die Anzahl ausschüssiger Schrauben mehr als 3 beträgt:
 $P(X > 3)$ für $p = 0,15$ bei $n = 20$

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - F(20; 0,15; 3) \\ &\approx 0,35227 \\ &\approx 35,2\% \end{aligned}$$

Dieser Fehler wird also recht häufig auftreten. Das Verfahren ist brauchbar, wenn dem Händler sein Ruf mehr Wert ist, als der Verlust beim Verkauf 1. Wahl zum Preis von 2.

Fehler

Die
Irrtumswahrscheinlichkeit
1. Art (Fehler 1. Art) ist
 $P(\alpha) = P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1)$

$$= P(X \leq 3)$$

$$= F(20; 0,4; 3)$$

$$\approx 0,01596$$

$$\approx 1,6\%$$

Die
Irrtumswahrscheinlichkeit
2. Art (Fehler 2. Art) ist
 $P(\beta) = P_{H_1}(\text{Entscheidung für } H_0)$

$$= P(X > 3)$$

$$= 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - F(20; 0,15; 3)$$

$$\approx 0,35227$$

$$\approx 35,2\%$$

Beurteilung

Wenn man vor allem daran interessiert ist, die schlechtere Qualität nicht irrtümlich für besser zu halten, ist der Test brauchbar. Andernfalls muss der Annahmehereich geändert werden.
(Stichprobenumfang, kritischer Wert K)

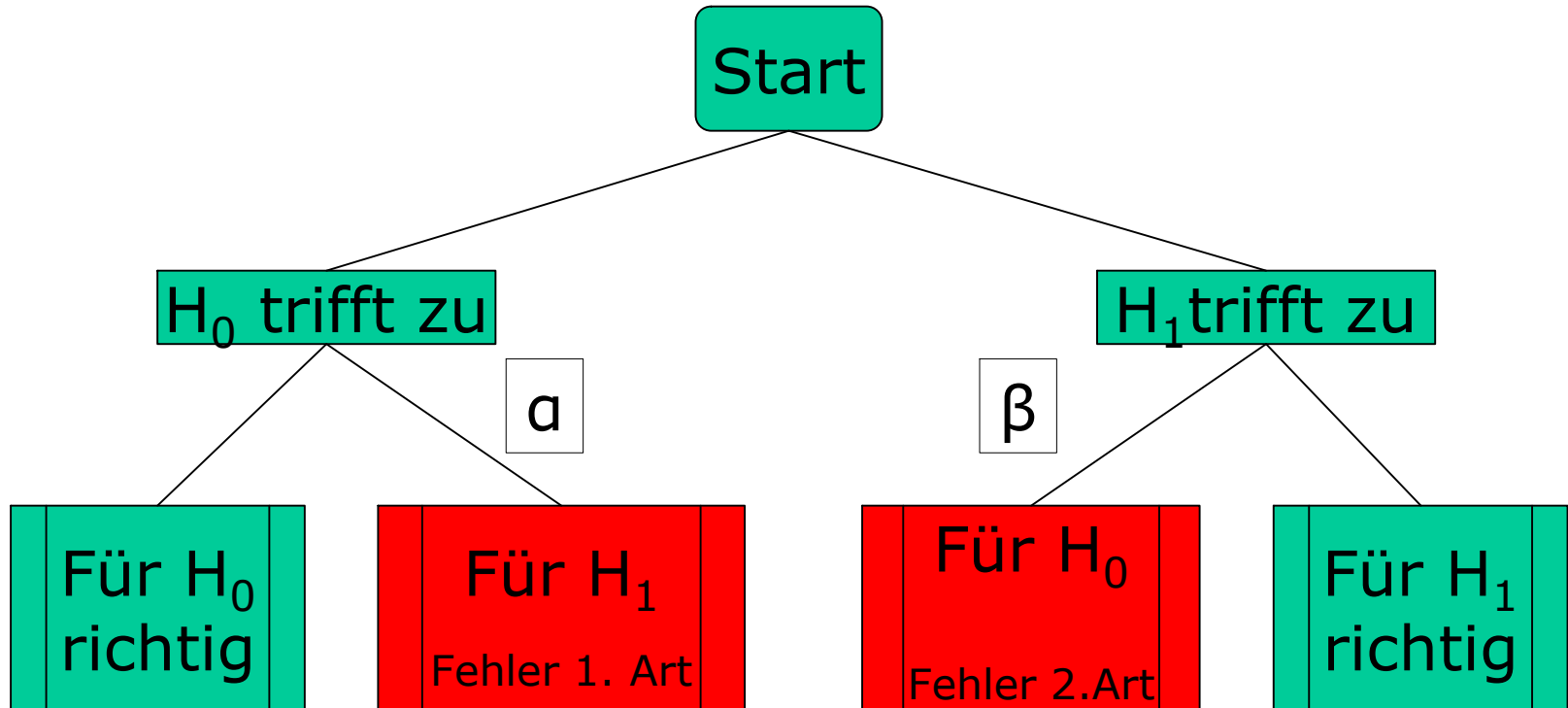
Fehler

Da die Stichprobenergebnisse zufallsbedingt sind, kann es zu Fehlentscheidungen kommen:

Ein Fehler 1.Art liegt vor, wenn eine richtige Hypothese abgelehnt wird,

ein Fehler 2.Art liegt vor, wenn eine falsche Hypothese angenommen wird.

Übersicht



Grundbegriffe 1

Statistische Gesamtheit

Menge der Schrauben in der Kiste

Hypothesen

H_0 : Die Kiste ist 2. Wahl oder $H_0: p=0,4$

H_1 : Die Kiste ist 1. Wahl oder $H_1: p=0,15$

p = Anteil ausschüssiger Schrauben in der Kiste

Stichprobe

Der Kiste wird eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n=20$ entnommen

Prüfgröße

Durch das Stichprobenergebnis wird der Wert einer Zufallsvariablen X festgelegt (X = Anzahl ausschüssiger Schrauben)

Grundbegriffe 2

Entscheidungsregel

*Mit Hilfe der Prüfgröße wird die Entscheidungsregel formuliert:
Übersteigt der Wert der Prüfgröße die kritische Zahl K in der Stichprobe nicht, so wird diejenige Hypothese angenommen, die niedrigeren Werten der Prüfgröße entspricht.*

Entscheidungsregel (Beispiel)

*kritische Zahl K : 3 $X \leq K$: Entscheidung für H_1 (Kiste ist 1. Wahl)
 $X > K$: Entscheidung für H_0 (Kiste ist 2. Wahl)*

Wahl der kritischen Zahl K

K wird vor Entnahme der Stichprobe unter subjektiven Gesichtspunkten festgelegt

K klein: geringes Risiko, das 2. Wahl als 1. Wahl eingestuft wird

K groß: geringes Risiko, das 1. Wahl als 2. Wahl eingestuft wird

Grundbegriffe 3

Annahmebereich – Verwerfungsbereich

K unterteilt die Wertemenge der Prüfgröße X in zwei Bereiche:

Verwerfungsbereich von H_0 : }
Annahmebereich von H_1 : } $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Annahmebereich von H_0 : }
Verwerfungsbereich von H_1 : } $X \in \{4, 5, \dots, 20\}$