1. Aufgabe: Testen von Hypothesen

Bei einer Umfrage unter 1002 Bundesbürgern wurde überprüft, wie hoch der prozentuale Anteil der Fernsehzuschauer ist, die regelmäßig die Sendung von Sandra Maischberger sehen (2002) . Man vermutet einen Anteil von mindestens 24%.

a) Formulieren Sie eine Entscheidungsregel für folgende Fehlerwahrscheinlichkeiten eines Fehlers 1. Art: 10%, 5%, 0,5%.

b) Der tatsächliche Anteil liegt niedriger. Es werden 500 Personen befragt. Bestimmen Sie unter diesen Bedingungen eine Entscheidungsgrenze, die trotzdem die Annahme von mindestens 24% stützt.(*Berechnung für eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 5%*).

c) Tatsächlich liegt der Anteil der regelmäßigen Seher bei 22%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dennoch ein Ergebnis erreicht wird, das die Annahme von mindestens 24% stützt!

d) Welche Art Fehler wird dann begangen?

2. Aufgabe: Analytische Geometrie

Gegeben seien die Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und g_2: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ t \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Wert für t so, dass die Geraden sich schneiden und geben Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden an.
b) Durch die zwei Geraden wird eine Ebene festgelegt. Geben Sie eine Gleichung in Koordinatenform an.
c) Zeigen Sie, dass der Punkt P(-3/-6/11) nicht zu der Ebene E gehört und bestimmen Sie seinen Abstand von der Eben

Lösungen

1a) n=1002   p=0,24

Fehlerwahrscheinlichkeit 10%
Berechnet wird [E-1,28σ,E+1,28σ·] = [223.18, 257.78]
Entscheidungsregel:
Wenn höchstens 223 der Befragten angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen ist die Hypothese abzulehnen.

Fehlerwahrscheinlichkeit 5%
Berechnet wird [E-1,64σ,E+1,64σ·] = [218.31, 262.65]
Entscheidungsregel:
Wenn höchstens 218 der Befragten angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen ist die Hypothese abzulehnen.

Fehlerwahrscheinlichkeit 0,5%
Berechnet wird [E-1,28σ,E+1,28σ·] = [205.60, 275.36]
Entscheidungsregel:
Wenn höchstens 205 der Befragten angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen ist die Hypothese abzulehnen.

1b) n=500   p=0.24

Die Hypothese p≥24% soll gestützt werden. H wird gestützt, wenn die Gegenhypothese p<24% abgelehnt werden muss. Die einseitige Hypothese p<24% wird verworfen, wenn extrem große Versuchsergebnisse vorliegen: E+1.64σ
Deshalb wird die 90%-Umgebung für n=500 und p=0.24 berechnet.

Berechnung einer 90%-Umgebung
[E-1,64σ,E+1,64σ] = [104.34, 135.66]
Entscheidungsregel:
Werden mindestens 136 Personen angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen, wird die Hypothese p≥24% unterstützt.

1c)

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem tatsächlichen Anteil von 22% mindestens 136 Personen zu diesem Teil gehören: P(X≥136) für n=500 und p=0.22:

$$P(X\geq 136)=\sum_{i=136}^{500}\binom{500}{i}\cdot 0.22^{i}\cdot 0.78^{500-i}\approx 0.0035=0{,}35\%$$

1d)

Hier wird nach der Wahrscheinlichkeit für eine fälschliche Annahme der Hypothese gefragt, also nach der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

2)

Zur Berechnung des Schnittpunktes werden die Geradengleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 2r+3=-4s-3 \\ r+2= s\cdot t+1 \\ 5r+7=-6s-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2r+4s=-6 \\ r-s\cdot t=-1 \\ 5r+6s=-11 \end{matrix}$$

Die Lösung wird als Lösung eines Gleichungssystems für r, s und t in einem Schritt bestimmt: r = -1 ∧ s = -1 ∧ t = 0

Die Gerade k schneidet Gerade g: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4s-3 \\ 0\cdot s+1 \\ -6s-4 \end{pmatrix}$

Berechnung der Schnittpunktskoordinaten: $\vec{x_s} = \begin{pmatrix} -4\cdot(-1)-3 \\ 1 \\ -6\cdot(-1)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Koordinatenform der Ebenengleichung in 2 Schritten:

1. Normalenvektor mit Kreuzprodukt der Richtungsvektoren

$$\vec{n} = BxD = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Herstellen der Koordinatenform aus der Normalenform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow -6x-8y+4z=-18-16+28=-6$$

Prüfen, ob P zu E gehört: Punkt P einsetzen in die Koordinatenform

6·(-3) + 8·(-6) - 4·11 = 6 ⇒110 = 6 ⇒P *liegt nicht in E!*

Abstandsberechnung:

$$h=\frac{\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}=10.77032961$$