1. Aufgabe: Analysis

a) Untersuche die Funktionen $f_k(x)=xe^{kx}$ ($x\in\mathbf{R}$, k>0) auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
(Bestimme die ersten beiden Ableitungen, benutze für die weiteren Schritte jedoch $f'(x)=e^{kx}(1+kx)$, $f''(x)=k\cdot e^{kx}(2+kx)$, $f'''(x)=k^2\cdot e^{kx}(3+kx)$)

b) Zeige, dass die Minimumpunkte aller Funktionen f_k auf dem Graphen zu **y=x/e** liegen.

c) Gib eine entsprechende Funktion für die Wendepunkte aller Funktionen f_k an.

2. Aufgabe: Analytische Geometrie

a) Welche Gleichungen in Normalenform besitzen die Tangentialebenen in den gegebenen Punkten A (5 | -3| 4) und C (1| -1| 0) an die Kugel mit der Gleichung:

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$$

b) Welche Lage haben die Ebenen zueinander?

3. Aufgabe: Testen von Hypothesen

Bei einer Umfrage unter 2000 Passanten wurde überprüft, wie hoch der prozentuale Anteil der Fernsehzuschauer ist, die regelmäßig das Polit-Magazin Rundblick anschauen. Man vermutet einen Anteil von mindestens 24%.

a) Formuliere eine entsprechende Entscheidungsregel für eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 5%.

b) Tatsächlich liegt der Anteil der regelmäßigen Seher bei 23,5%. Es wurden 1000 Personen befragt. Wie viele der Befragten müssen angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen, damit die Hypothese trotzdem gestützt wird. Welche Art Fehler wird dann begangen?

Nullstellen

Da $e^{kx} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$, haben alle Graphen nur die Nullstelle $x_o = 0$.

Ableitungen

f(x)=x·e^kx		
	u=x	u'=1
f'(x)=$1 \cdot e^{kx}+x \cdot ke^{kx^\wedge(\wedge}$ **=$e^{kx}(1+kx)$**	v= e^{kx} *(Kettenregel)*	v'=ke^{kx}
	u=e^{kx}	u'=ke^{kx}
f''(x)=$ke^{kx}\cdot(1+kx)+e^{kx}\cdot k$ **=$ke^{kx}(2+kx)$**	v=1+kx	v'=k
	u=ke^{kx}	u'=k^2e^{kx}
f'''(x)=$k^2e^{kx}\cdot(2+kx)+ke^{kx}\cdot k$ **=$k^2e^{kx}(3+kx)$**	v=2+kx	v'=k

Extremstellen

$f'(x_E) = 0$ genau dann, wenn $1+kx_E=0$ ist. Als einzige Lösung ergibt sich $x_E = -1/k$.
$f''(-1/k) = ke^{k\cdot(-1/k)}(2+k\cdot(-1/k)) = k/e > 0$, da k größer Null ist. Es handelt sich also um eine Minimumstelle.

Wendepunkte

$f''(x_W) = 0$ genau dann, wenn $2 + kx = 0$ ist. Als einzige Lösung ergibt sich $x_W = -2/k$.
$f'''(-2/k) = k^2e^{k\cdot -2/k}(3+k\cdot(-2/k)) = k^2e^{-2}(3-2) \neq 0$. Es handelt sich um eine Wendestelle.

Gleichungen

Gleichung für die Extrempunkte

1. Alle Minima liegen auf einer Geraden mit der Gleichung **y = x/e**.

Gleichung für die Wendestellen

1. Alle Wendepunkte liegen auf einer Geraden mit der Gleichung **$y = x/e^2$**.

Mögliche Zusatzfragen: Verhalten für $x \to \pm\infty$;
Asymptoten;

Ansatz: $T_A : (\vec{a} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$$T_A: \quad \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$T_A: \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 21 = 0 \qquad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$T_C: \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$T_C: \quad -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \qquad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Welche Lage haben die Ebenen zueinander ?

Lösung

T_C: $2x_1-x_2+2x_3 = 3$

Die Ebenen liegen folgendermaßen: $\overrightarrow{n_A} = \overrightarrow{n_C} \rightarrow T_A \parallel T_B$

Lösung 3. Aufgabe

a) n = 2000; p=0,24 μ = 480; σ = 19,1
Fehlerwahrscheinlichkeit 5%: μ - 1,64σ = 448,676
Wenn höchstens 448 der Passanten angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen, ist die Vermutung abzulehnen.

b) Die Hypothese H≥24% soll gestützt werden, daher wird die Gegenhypothese p<24% untersucht. Die Entscheidungsgrenze muss entsprechend der angenommenen Wahrscheinlichkeit 24% berechnet werden.
n=1000; p=0,24; μ = 240; σ = 13,51
Fehlerwahrscheinlichkeit 5%: μ + 1,64σ = 262,2
Wenn 263 der Passanten angeben, die Sendung regelmäßig zu sehen, wird H unterstützt..