M13 Üb vor Klaus

14.04.2007/ pl

1) Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x)=$\frac{6x^2}{(x+1)^2}$ auf
   a) den möglichen Definitionsbereich,
   b) Symmetrie,
   c) Polstellen und auf das Verhalten im Unendlichen (Asymptoten),
   d) Nullstellen,
   e) Extrem- und Wendestellen.
   f) Skizzieren Sie den Graphen.

2) Untersuchen Sie die Funktionenschar $f_t(x)=x\cdot e^{kx}$ ($x\in\mathbf{R}$, $k<0$) auf
   a) Nullstellen,
   b) Extrem- und Wendepunkte,
   c) Auf welcher Kurve liegen die Extrem- bzw. Wendepunkte der Schar? Geben Sie die entsprechenden Gleichungen an!

3) Gib die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M(4/4) und dem Radius r=2 in der Ebene in vektorieller und in Koordinatenschreibweise an!

4) Untersuche die Lagebeziehungen der Punkte $A_1(2;0;1)$, $A_2(6;-1;2)$ und $A_3(0;0;0)$ bezüglich der Kugel k: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$!

5) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte des Kreises k: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ mit der x-Achse und der y-Achse!

6) Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Kreis k: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16{,}25$ in den Kreispunkten mit der Koordinate x = 0!

1) Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x)= $\frac{6x^2}{(x+1)^2}$ auf

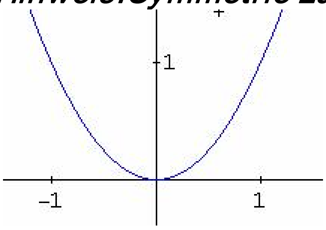
   a) den möglichen Definitionsbereich,
   b) Symmetrie,
   c) Polstellen und auf das Verhalten im Unendlichen (Asymptoten),
   d) Nullstellen,
   e) Extrem- und Wendestellen.
   f) Skizzieren Sie den Graphen.

Lösungen

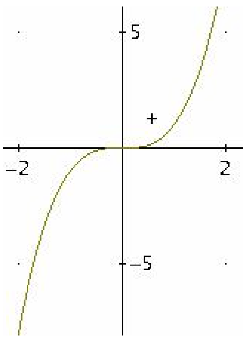
Definitionsbereich

Der Nenner von f hat eine einzige Nullstelle bei x = -1. Die Funktion ist hier nicht definiert. Deshalb gilt **D** = **R**\{-1}

Hinweis:Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung



f(x) = x^2
Symmetrie liegt vor, wenn f(-x)=f(x) gilt.
Beispiel: f(x)= x^2 $\rightarrow$ f(-x) = $(-x)^2$ = x^2 = f(x)



f(x)=x^3
Symmetrie zum Ursprung liegt vor, wenn f(-x)=-f(x) gilt.
Beispiel: f(x) = x^3 $\rightarrow$ f(-x)=$(-x)^3$ = - x^3 = - f(x)

Symmetrie

f(-x)= $\frac{6(-x)^2}{(-x+1)^2} = \frac{6x^2}{(-x+1)^2}$.

f(x)= $\frac{6x^2}{(x+1)^2}$ Es besteht keine Symmetrie zur y-Achse, f(-x) $\neq$ f(x)

f(-x)= $\frac{6x^2}{(-x+1)^2}$

-f(x)= $-\frac{6x^2}{(x+1)^2}$ Es besteht auch keine Symmetrie zum Ursprung, denn f(-x) $\neq$ -f(x)

Polstellen

f besitzt eine Polstelle für x = -1.

Verhalten im Unendlichen

Zähler- und Nennerpolynom besitzen den gleichen Grad. Für x $\to \pm\infty$ geht f(x) $\to$ 6, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 6\frac{x^2}{(x+1)^2}$; für große x-Werte unterscheidet sich x^2 nur sehr geringfügig von $(x+1)^2$, der Wert des Bruches nähert sich immer mehr 1. Die Asymptote ist y = 6, eine Parallele zur x-Achse.

Nullstellen

Die Funktion f hat genau dort eine Nullstelle, wo der Zähler Null und der Nenner ungleich Null ist.

f hat nur eine Nullstelle für x = 0, denn $6x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$

Ableitungen

$v=(x+1)^2$ *und wird nach der Kettenregel abgeleitet:*
Setze z=x+1 und $u=z^2$, dann ist z'=1 und u'=2z. (Substitution)
$v'=z' \cdot u' = 1\cdot 2z = 2\cdot(x+1)=2x+2$ (Rücksubstitution)

f'(x) = $\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{12x(x+1)^2 - 6x^2(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{12x}{(x+1)^3}$

$v=(x+1)^3$ *und wird nach der Kettenregel abgeleitet:*
Setze z=x+1 und $u=z^3$, dann ist z'=1 und $u'=3z^2$. (Substitution)
$v'=z' \cdot u' = 1\cdot 3z^2 = 3\cdot(x+1)^2=$ (Rücksubstitution)

f''(x) = $\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{12\cdot(x+1)^3 - 3(x+1)^2\cdot 12x}{(x+1)^6} = \frac{12(1-2x)}{(x+1)^4}$

$v=(x+1)^4$ *und wird nach der Kettenregel abgeleitet:*
Setze z=x+1 und $u=z^4$, dann ist z'=1 und $u'=4z^3$. (Substitution)
$v'=z' \cdot u' = 1\cdot 4z^3 = 4\cdot(x+1)^3=$ (Rücksubstitution)

f'''(x)= $\frac{72(x-1)}{(x+1)^5}$

Hoch- und Tiefpunkte:

f'(x)=0, wenn $12x_E = 0$ ist. Dies ist nur für $x_E=0$ der Fall. Für f'' gilt dann:
f''(0)= $\frac{12\cdot(1-2\cdot 0)}{(0+1)^4} = 12 > 0$. Die Funktion hat einen Tiefpunkt bei P(0/0).

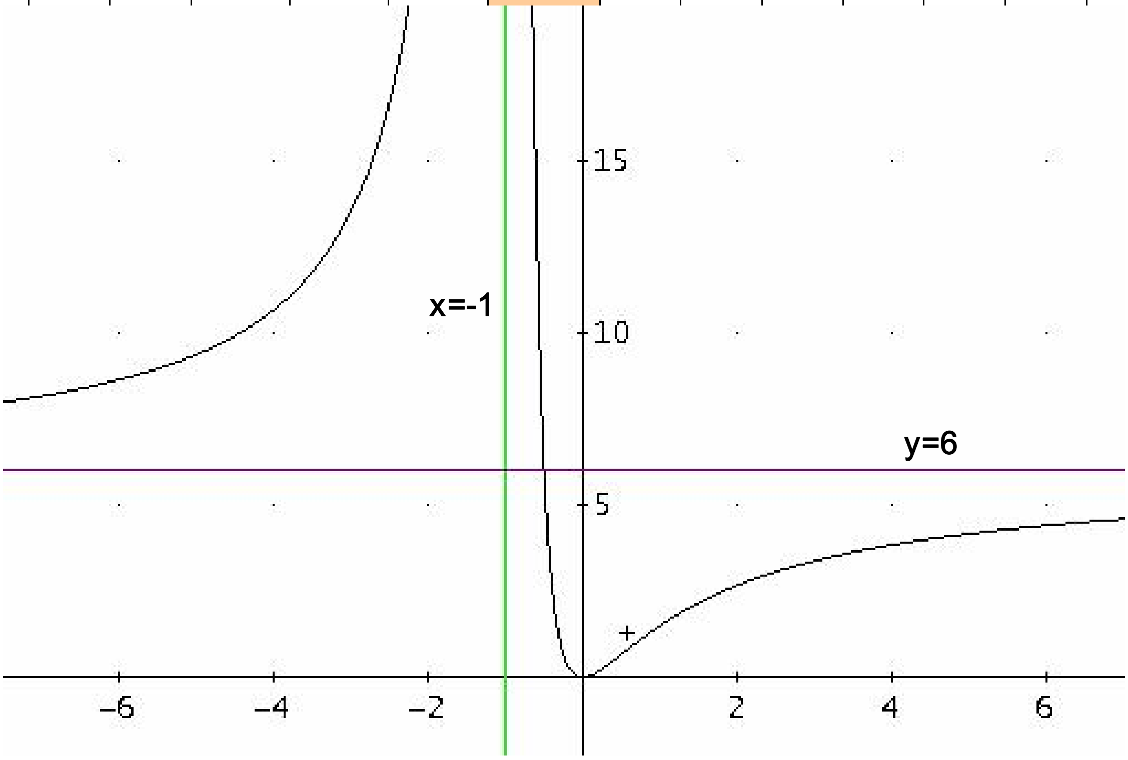
Wendepunkte:

f''(x)=0, wenn -24x+12=0 ist. Die ist für x_W = ½ der Fall.
Die hinreichende Bedingung f'''(1/2) $\neq$ 0 ist erfüllt, es handelt sich um einen Wendepunkt W(1/2 / 2/3)

Wertetabelle

(Kann auch kürzer ausfallen; besondere Werte(Null-,Extrem-, Wendestellen müssen eingetragen werden)

							TP	WP					
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	2	3	4	5	6
f(x)	8,64	9,38	10,67	13,50	24,00	nicht def	0,00	0,67	2,67	3,38	3,84	4,17	4,41



M13 Üb vor Klaus

07.04.2005 / pl

2) Untersuchen Sie die Funktionenschar $f_t(x)=x \cdot e^{kx}$ ($x \in \mathbf{R}$, $k<0$) auf
   a) Nullstellen,
   b) Extrem- und Wendepunkte,
   c) Auf welcher Kurve liegen die Extrem- bzw. Wendepunkte der Schar? Geben Sie die entsprechenden Gleichungen an!

Lösungen

Nullstellen

Da $e^{kx} \neq 0$ für alle $x \in D$, haben alle Graphen nur die Nullstelle $x_o = 0$.

Ableitungen

$f(x)=x \cdot e^{kx}$

$f'(x)$ $=1 \cdot e^{kx}+x \cdot ke^{kx}$	$=\mathbf{e^{kx}(1+kx)}$	$u=x$ $v= e^{kx}$ *(Kettenregel)*	$u'=1$ $v'=ke^{kx}$
$f''(x)$ $=ke^{kx} \cdot (1+kx)+e^{kx} \cdot k$	$=\mathbf{ke^{kx}(2+kx)}$	$u=e^{kx}$ $v=1+kx$	$u'=ke^{kx}$ $v'=k$
$f'''(x)$ $=k^2e^{kx} \cdot (2+kx)+ke^{kx} \cdot k$	$=\mathbf{k^2e^{kx}(3+kx)}$	$u=ke^{kx}$ $v=2+kx$	$u'=k^2e^{kx}$ $v'=k$

Extremstellen

$f'(x_E)= 0$ genau dann, wenn $1+kx_E=0$ ist. Als einzige Lösung ergibt sich $x_E = - 1/k$.
$f''(-1/k) = ke^{k \cdot -1/k}(2+k \cdot (-1/k)) = k/e < 0$, da k kleiner Null ist. Es handelt sich also um eine Maximumstelle.

Wendepunkte

$f''(x_W) = 0$ genau dann, wenn $2 + kx = 0$ ist. Als einzige Lösung ergibt sich $x_W = -2/k$.
$f'''(-2/k) = k^2e^{k \cdot -2/k}(3+k \cdot (-2/k)) = k^2e^{-2}(3-2) \neq 0$. Es handelt sich um eine Wendestelle.

Gleichungen

Gleichung für die Extrempunkte

1. Auflösen nach k: **$x_E = -1/k \Leftrightarrow k=-1/x_E$**.
2. Einsetzen in f(x): **$y = x \cdot e^{(-1/x) \cdot x} = x/e$**.
3. Alle Maxima liegen auf einer Geraden mit der Gleichung **$y = x/e$**.

Gleichung für die Wendestellen

1. Auflösen nach k: **$x_E = -2/k \Leftrightarrow k=-2/x_E$**.
2. Einsetzen in f(x): **$y =x \cdot e^{(-2/x) \cdot x} = x/e^2$**.
3. Alle Wendepunkte liegen auf einer Geraden mit der Gleichung **$y = x/e^2$**

3) Gib die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M(4/4) und dem Radius r=2 in der Ebene in vektorieller und in Koordinatenschreibweise an!

Lösung

$$(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2 \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 4 \qquad \textit{oder anders } (x_1-4)^2+(x_2-4)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

4) Untersuche die Lagebeziehungen der Punkte $A_1(2;0;1)$, $A_2(6;-1;2)$ und $A_3(0;0;0)$ bezüglich der Kugel k: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$!

$(2-3)^2+(0+1)^2+(1-2)^2=3<16 \rightarrow A_1$ liegt innerhalb der Kugel

$(6-3)^2+(-1+1)^2+(2-2)^2=9<16 \rightarrow A_2$liegt innerhalb derKugel

$(0-3)^2+(0+1)^2+(0-2)^2=14<16 \rightarrow A_3$ liegt innerhalb der Kugel

5) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte des Kreises k: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ mit der x-Achse und der y-Achse!

Für S_x gilt $y=0 \rightarrow (x-3)^2+2^2=16 \rightarrow x=3-2\sqrt{3}$ v $x=3+2\sqrt{3} \rightarrow S_{x1,2}(3\pm2\sqrt{3}\ /0)$

Für S_y gilt entsprechend $x=0 \rightarrow y=-2+\sqrt{7}$ v $y=-2-\sqrt{7} \rightarrow S_{y1,2}(0/\ -2\pm\sqrt{7}\ )$

6) Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Kreis k: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16{,}25$ in den Kreispunkten mit der Koordinate x = 0!

Für x=0 gilt: $2^2+(y-1)^2=16{,}25 \rightarrow y^2-2y-11{,}25=0 \rightarrow P_1(0/-2{,}5)$ v $P_2(0/4{,}5)$

Für die Tangentengleichung im Punkt P_o an den Kreis k(M,r) gilt:

$$\left(\vec{p_0}-\vec{m}\right)*(\vec{x}-\vec{m}) = r^2$$

$$\begin{pmatrix}0-(-2)\\-2{,}5-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x-(-2)\\y-1\end{pmatrix}=16{,}25$$

$$2(x+2)-3{,}5(y-1)=16{,}25$$

t_1: $y=0{,}5714x-2{,}5$

$$\begin{pmatrix}0-(-2)\\4{,}5-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x-(-2)\\y-1\end{pmatrix}=16{,}25$$

$$2(x+2)+3.5(y-1)=16{,}25$$

t_2: $y= -0{,}5714x+4{,}5$