

1) (Aufgabe 1 der Übungsarbeit)

In einer Urne mit sehr vielen Kugeln sind 30% der Kugeln oder 60% der Kugeln schwarz. Es wird eine Stichprobe vom Umfang $n=10$ gezogen. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Erhält man bei diesem Ziehungsvorgang höchstens 4 Kugeln, die nicht schwarz sind, entscheidet man sich für die 60%-Angabe, sonst für die 30%-Angabe.

- Wählen Sie als „Erfolg“, dass die Kugel schwarz ist. Formulieren Sie die Nullhypothese H_0 mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p=0,60$ und geben Sie die Gegenhypothese an.
- Geben Sie den Annahmehereich A und den Ablehnungsbereich A^{-1} für H_0 an.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Fehlentscheidungen.

2) Bei einer Wahl erhielt die Partei XYZ 37,4% der Stimmen. Angenommen, man hätte 500 zufällig ausgewählte Wählerinnen und Wähler beim Verlassen ihres Wahllokals befragt und diese hätten wahrheitsgetreu geantwortet.

- Wie viele Wähler/innen der Partei XYZ hätte man vermutlich in der Stichprobe erfasst? Wie hoch wäre vermutlich der Anteil der Wähler/innen der Partei XYZ in der Stichprobe gewesen?
- 10 Wochen nach der Wahl geben 180 von 500 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten an, dass sie bei der letzten Wahl die Partei XYZ gewählt hatten. Beurteile dieses Befragungsergebnis.

3) (Aufgabe2 der Übungsarbeit)

Bekanntlich beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt $p = 0,486$.

- Unter 832 Neugeborenen einer Geburtsklinik waren 448 Jungen. Ist dies ungewöhnlich?
- Von den 832 Neugeborenen wurden 95 an einem Sonntag geboren, 135 am Montag, 112 am Dienstag, 118 am Mittwoch, 131 am Donnerstag, 141 am Freitag und 100 am Samstag. Beurteile diese Ergebnisse.

4) Der Bürgermeister einer ziemlich unbekanntes Gemeinde verspricht einem Werbeunternehmen eine bestimmte Zusatz-Prämie, wenn es dem Unternehmen gelingt, durch eine Werbekampagne das Image der Gemeinde unter Bundesbürgern so zu verändern, dass mehr als 50% der Befragten etwas Positives mit dem Namen der Stadt verbinden. Zur Kontrolle der Effektivität sollen nach der Kampagne 800 zufällig ausgewählte Bundesbürger befragt werden.

- Welche Standpunkte können für diesen Hypothesentest eingenommen werden?
- Bestimme Entscheidungsregeln auf dem 90%-Niveau.
- Welche Auswirkungen hätten jeweils Fehler 1. und 2. Art?
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, falls der tatsächliche Anteil positiv über die Gemeinde denkender Menschen 55 % bzw. 45 % beträgt.

5) Beim Skat-Kartenspiel werden an die drei Mitspieler je 10 Karten ausgeteilt; zwei Karten werden im so genannten *Skat* abgelegt.

- Begründe: Die Wahrscheinlichkeit, dass kein ASS im Skat liegt, beträgt 76,2%.
- Gib eine Entscheidungsregel an: Wie oft dürfte dieses Ereignis in 200 Spielen vorkommen, ohne dass man Grund zur Skepsis gegenüber dem Mischverfahren hat?
- Welche Fehler können vorkommen

Lösungen Aufgabe 1

zu a)

Es gilt für die Nullhypothese $H_0: p_0 = 0,60\%$ und damit für die Gegenhypothese $H_1: p_1 = 0,30$.

zu b) Annahme- und Ablehnungsbereich für die Hypothese H_0 :

„Sind in der Ziehung mehr als 4 schwarze Kugeln enthalten, wird die Hypothese angenommen“

$$A = \{\dots, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

„Sind in der Ziehung weniger als 5 schwarze Kugeln enthalten, wird die Hypothese abgelehnt.“

$$A^{-1} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

zu c) Fehler 1. Art: H_0 ist wahr, doch zufällig werden trotzdem weniger als 5 schwarze Kugeln gezogen

$$\alpha = P(A^{-1} \text{ hinsichtlich } p_0) = \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} * 0,6^k * 0,4^{10-k} \approx 16,6\%$$

Fehler 2. Art: H_1 ist wahr, doch zufällig werden mehr als 4 schwarze Kugeln gezogen

$$\beta = P(A \text{ hinsichtlich } p_1) = \sum_{k=5}^4 \binom{10}{k} * 0,3^k * 0,7^{10-k} \approx 15,0\%$$

Lösungen Aufgabe 2a) 95 %-Umgebung von $\mu = 187:166 < X < 208$;

$$95 \text{ \% -Umgebung von } p = 0,374: 33,2\% < \frac{X}{n} < 41,6\%$$

b) Das Stichprobenergebnis ist verträglich mit $p = 0,374$ (es liegt im Annahmebereich der Hypothese $p = 0,374$).**Lösungen Aufgabe 3**c) 95%-Umgebung von $\mu: 377 < X < 432$; 384 Mädchengeburten sind nicht ungewöhnlich.d) 95 % -Umgebung für ($n = 832$; $p = 1/7$; $\mu = 118,9$; $\sigma = 10,09$; $100 < X < 138$)
Die Geburtshäufigkeiten am Sonntag bzw. am Freitag weichen signifikant ab.**Lösungen Aufgabe 4**2) Für $n = 800$; $p = 0,5$ ist $\mu = 400$; $\sigma = 14,14$,a) **Standpunkt der Werbeagentur:** Unsere Werbeaktion ist effektiv. Mehr als 50% der Menschen verbinden mit dem Namen der Stadt etwas Positives. Von diesem Standpunkt gehen wir nur ab bei signifikanter Abweichung nach unten (Hypothese: $> 0,5$).b) signifikantes Abweichen: 5% nach oben oder unten \rightarrow 90%-Umgebung:
Umgebung 90: $\mu - 1,64 \cdot 14,14 < X < \mu + 1,64 \cdot 14,14 \rightarrow 377 < X < 423$ **Entscheidungsregel:** Verwirf die Hypothese $p > 0,5$, falls weniger als 377 Personen

- in der Stichprobe positive Assoziationen bei Nennung der Stadt haben.
- c) Auswirkungen eines Fehlers 1. Art: Die Werbeaktion war erfolgreich; die Agentur erhält trotzdem nicht die Zusatz-Prämie. $\alpha = P_{0,55}(X \leq 376) =$
 Auswirkungen eines Fehlers 2. Art: Die Werbeaktion war nicht erfolgreich; die Werbeagentur besteht trotzdem auf Zahlung der Zusatz-Prämie.
- d) $\alpha = P_{0,55}(X \leq 424)$
- a) **Standpunkt Bürgermeister:** Im Interesse der Finanzen unserer Stadt sind wir skeptisch bzgl. des Erfolgs der Werbeagentur. Diesen Standpunkt geben wir nur auf bei signifikant nach oben abweichenden Stichprobenergebnissen. (Hypothese: $p < 0,5$).
- b) **Entscheidungsregel:** Verwirf die Hypothese $p < 0,5$, falls mehr als 423 Personen in der Stichprobe etwas Positives mit dem Namen der Stadt verbinden.
- c) Auswirkungen eines Fehlers 1. Art: Die Werbeaktion war eigentlich nicht erfolgreich; der Bürgermeister zahlt trotzdem die Zusatz-Prämie. Auswirkungen eines Fehlers 2. Art: Die Werbeaktion war erfolgreich; der Bürgermeister verweigert die Zahlung der Zusatz-Prämie
- d) $\alpha = P_{0,45}(X \geq 424) =$

Lösung Aufgabe 5

Wie sind die Assen verteilt? $\frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{30}{4}}{\binom{32}{4}} = \underline{0,762}$ oder was liegt im Skat? $\frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \underline{0,762}$

Für $n = 200$; $\mu = 152,4$; $\sigma = 6,02$ ergibt sich als 90%-Umgebung: $143 < X < 162$.

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p = 0,762$, falls weniger als 143-mal oder mehr als 162-mal kein ASS im Skat liegt.

Auswirkungen eines Fehlers 1. Art: Der Kartenmischer gerät unschuldig in Verdacht.

Auswirkungen eines Fehlers 2. Art: Obwohl der Kartenmischer manipuliert, fällt kein Verdacht auf ihn.