# M13 Untersuchungen von Funktionenscharen 21.03.2008

Beispiel: Untersuchen Sie die Funktionenschar $f_t(x)=x\cdot e^{kx}$ ($x\in\mathbf{R}$, $k<0$) auf

(1) Nullstellen,
(2) Extrem- und Wendepunkte,
(3) Auf welcher Kurve liegen die Extrem- bzw. Wendepunkte der Schar? Geben Sie die entsprechenden Gleichungen an!

## *Lösungen*

### Nullstellen

Da $e^{kx} \neq 0$ für alle $x \in D$, haben alle Graphen nur die Nullstelle $x_o = 0$.

### Ableitungen

**$f(x)=x\cdot e^{kx}$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)=1\cdot e^{kx}+x\cdot ke^{kx}$ | $=e^{kx}(1+kx)$ | $u=x$<br>$v=e^{kx}$ *(Kettenregel)* | $u'=1$<br>$v'=k\,e^{kx}$ |
| $f''(x)=ke^{kx}\cdot(1+kx)+e^{kx}\cdot k$ | $=ke^{kx}(2+kx)$ | $u=e^{kx}$<br>$v=1+kx$ | $u'=ke^{kx}$<br>$v'=k$ |
| $f'''(x)=k^2e^{kx}\cdot(2+kx)+ke^{kx}\cdot k$ | $=k^2e^{kx}(3+kx)$ | $u=ke^{kx}$<br>$v=2+kx$ | $u'=k^2e^{kx}$<br>$v'=k$ |

### Extremstellen

$f'(x_E)=0$ genau dann, wenn $1 + kx_E=0$ ist. Als einzige Lösung ergibt sich $x_E = -1/k$ .
$f''(-1/k) = ke^{k\cdot -1/k}(2+k\cdot(-1/k)) = k/e < 0$, da k kleiner Null ist. Es handelt sich also um eine Maximumstelle; lokales Maximum bei $E(\frac{-1}{k} / \frac{-1}{ek})$

### Wendepunkte

$f''(x_W) = 0$ genau dann, wenn $2 + kx = 0$ ist. Als einzige Lösung ergibt sich $x_W = -2/k$.
$f'''(-2/k) = k^2e^{k\cdot -2/k}(3+k\cdot(-2/k)) = k^2e^{-2}(3-2) \neq 0$. Es handelt sich um eine Wendestelle;
Wendepunkt bei $W(\frac{-2}{k} / \frac{-2}{e^2 k})$

### Ortskurven

Je nach Wahl des Wertes für den Parameter liegen somit auch die charakteristischen Punkte (wie z. B. Maxima, Wendepunkte, ...) an unterschiedlichen Stellen. Die Menge aller dieser Stellen bildet meist eine Kurve; sie heißt Ortskurve oder geometrischer Ort.
Um sie zu bestimmen, berechnet man zuerst die Koordinaten der gesuchten Punkte. Anschließend eliminiert man aus den Gleichungen für x- und y-Koordinate den Parameter, indem man eine Gleichung nach dem Parameter auflöst und in die andere einsetzt:

*Gleichung für den Extrempunkt mit* $x=\frac{-1}{k}$ und $y=\frac{-1}{ek}$, denn es ist $E(\frac{-1}{k} / \frac{-1}{ek})$

1. Gleichung für x auflösen nach k: **$x_E = -1/k \Leftrightarrow k= -1/x_E$.**
2. Einsetzen in Gleichung für y : **$y = \frac{-1}{e\cdot\frac{-1}{x}} = x/e$.**
3. Alle Maxima liegen auf einer Geraden mit der Gleichung **$y = x/e$**.

*Gleichung für die Wendestelle mit* $x=\frac{-2}{k}$ und $y=\frac{-2}{e^2 k}$, denn es ist $W(\frac{-2}{k} / \frac{-2}{e^2 k})$

1. Gleichung für x auflösen nach k: **$x_E = -2/k \Leftrightarrow k=-2/x_E$.**
2. Einsetzen in die Gleichung für y: **$y = \frac{-2}{e^2\frac{-2}{x}} = x/e^2$.**
3. Alle Wendepunkte liegen auf einer Geraden mit der Gleichung **$y = x/e^2$**

Aufgabe 1Kurvenscharen

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a$ mit $f_a(x) = ax^2 - x^3$ mit $a > 0$.

a) Berechne die Schnittpunkte der Graphen von $f_a$ mit den Koordinatenachsen!
b) Bestimme die ersten drei Ableitungen.
c) Ermittle die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte!
d) Untersuche, ob es ein $a_o > 0$ gibt, so dass die zugehörige Wendetangente durch den Ursprung des Koordinatensystems geht!
e) Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte der Schar!
f) Zeichne $f_a$ für a = 1, 2, 4 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

**Lösungen**

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der x-Achse: Nullstelle $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a \vee x = 0$

Schnittpunkt mit der y-Achse: Bestimme $f(0) = 0$, d.h. Schnittpunkt mit der y-Achse ist der Ursprung

b) Die ersten drei Ableitungen

$f'(x) = 2\cdot a\cdot x - 3\cdot x^2$

$f''(x) = 2\cdot a - 6\cdot x$

$f'''(x) = -6$

c) Extrempunkte $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}a \vee x = 0$

Einsetzen in die zweite Ableitung: $f''(\frac{2}{3}a) = -2a < 0 \Rightarrow HP(\frac{2}{3}a / \frac{4}{27}a^3)$

$f''(0) = 2a > 0 \Rightarrow TP(0 / 0)$

d) Wendepunkte für $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a$ ; da $f'''(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad WP(\frac{1}{3}a / \frac{2}{27}a^3)$

e) Gleichung der Wendetangente

Die Steigung ist $m = f'(\frac{1}{3}a) = \frac{1}{3}a^2$ ; $y_T = mx + b = \frac{1}{3}a^2 x + b$

Der Wendepunkt ist natürlich ein Punkt der Geraden (für x $\frac{1}{3}$a und für y $\frac{2}{27}a^3$ einsetzen):

$\frac{2}{27}a^3 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{3}a + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{27}a^3$

Gleichung der Wendetangente: $y_T = \frac{1}{3}a^2 x - \frac{1}{27}a^3$ ;

nun ist zu klären: Für welches a ist P(0/0) ein Punkt der Geraden:

$0 = 0 - \frac{1}{27}a^3 \Leftrightarrow a = 0$ , d.h. es gibt kein a > 0, welches die Bedingung erfüllt.

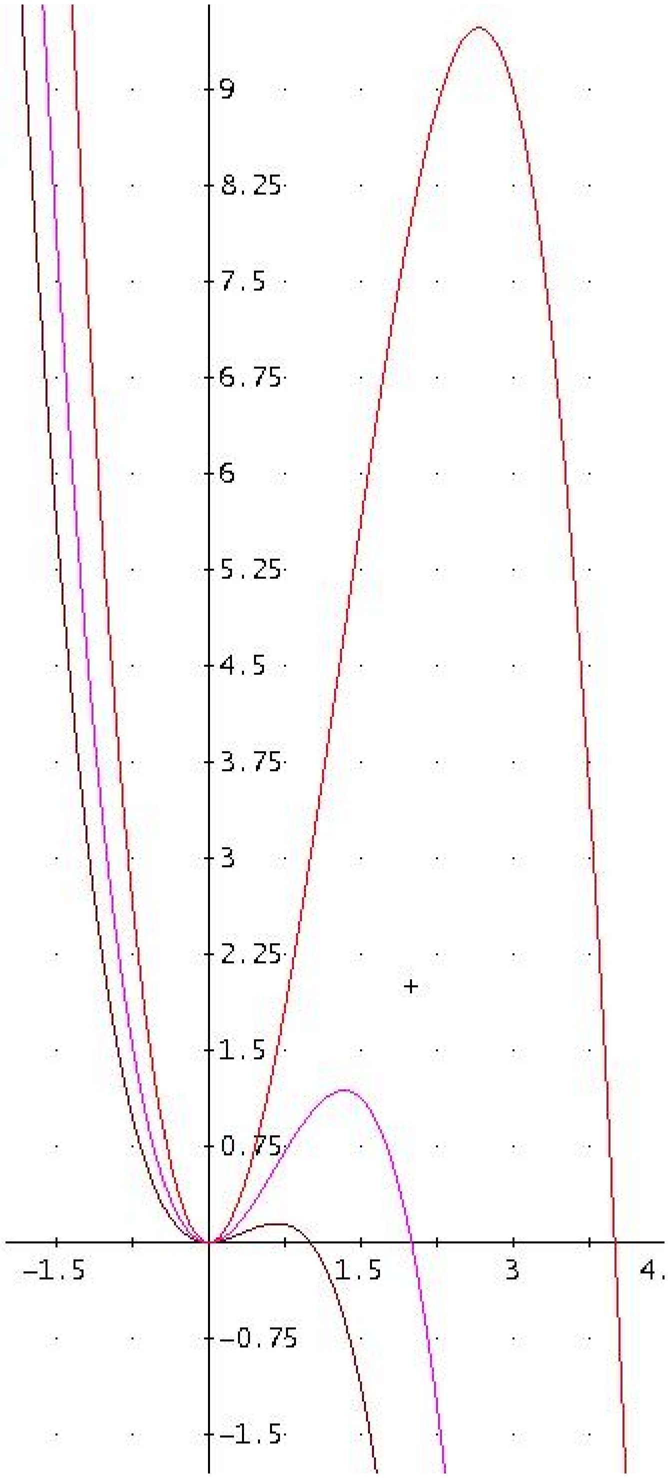
f) Ortskurve der Wendepunkte

1. Im Wendepunkt gilt $x = \frac{1}{3}a$ ; nach a auflösen $a = 3x$

2. Einsetzen für a in $y = \frac{2}{27}a^3$ $\quad y_w = \frac{2}{27}(3x)^3 = 2x^3$

g) Wertetabellen

| x | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x^3$ | 2,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | -1,1 | -4,0 | | | |
| $2x^2-x^3$ | 3,0 | 0,0 | 0,4 | 1,0 | 1,1 | 0,0 | -9,0 | | |
| $4x^2-x^3$ | 5,0 | 0,0 | 0,9 | 3,0 | 5,6 | 8,0 | 9,0 | 0,0 | -10,1 |


9
8.25
7.5
6.75
6
5.25
4.5
3.75
3
2.25
1.5
0.75
−1.5
1.5
3
4.
−0.75
−1.5

Aufgabe 2 Kurvenscharen
Diskutiere wie in Aufgabe 1

a) $f_k$ mit $f_k=(e^x-2k)^2$ für k € R
b) Zeichne $f_k$ für k = -1, 0, 1.
c) Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte.

Lösungen

a) Berechne die Schnittpunkte der Graphen von $f_a$ mit den Koordinatenachsen!
Nullstellen f(x)=0: $0 = (e^x-2k)^2 \Leftrightarrow e^x = 2k \Leftrightarrow x = \ln(2k)$; $f(\ln 2k) = 0$, denn $e^{\ln 2k}= 2k$, N(ln(2k) / 0)
für k<0 gibt es keine Nullstelle, für $k \geq 0$ berührt der Graph die x-Achse.
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = (1-2k)^2 \Rightarrow S_y(0 / (1-2k)^2)$

   i. Bestimme die ersten drei Ableitungen.
   $f'(x) = 2e^{2x} -4ke^x$
   $f''(x) = 4 e^{2x} – 4ke^x$
   $f'''(x) = 8e^{2x} – 4ke^x$

   ii. Ermittle die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte!
   $f'(x) = 0$ Fallunterscheidung für k < 0, k = 0 und k > 0
   $0 = 2e^{2x} -4ke^x \Leftrightarrow x = \ln(2k)$ , nur eine Lösung für k>0, sonst keine Lösung!
   Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt $f(\ln(2k))= 0 \Rightarrow E(\ln(2k) / 0)$
   $f''(\ln(2k) = 8k^2$ ist immer größer als Null, also ein lokales Minimum T(ln(2k) / 0) für k > 0
   $f''(x) = 0$
   $0 = 4 e^{2x} – 4ke^x \Leftrightarrow x=\ln(k)$
   Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt $f(\ln(k)) = k^2 \Rightarrow W(\ln(k) / k^2)$
   $f'''(\ln(k)) = 24k^2 \Rightarrow$ für alle k > 0 existiert ein Wendepunkt

   iii. Untersuche, ob es ein $k_o > 0$ gibt, so dass die zugehörige Wendetangente durch den Ursprung des Koordinatensystems geht!
   Wendetangentengleichung $y_T = mx + b$;
   Ableitung an der Stelle k ergibt die Steigung
   $m=f'(\ln(k)) = (2e^{2*\ln(k)} -4ke^{\ln(k)}) = 2 (e^{\ln(k)})^2 -4k\cdot k = -2k^2$
   $\Rightarrow y_T = -2k^2 \cdot x + b$
   Der Wendepunkt liegt auf der Tangente, damit lässt sich jetzt b bestimmen(Einsetzen für x und y): $k^2 = -2k^2 \cdot \ln(k) + b$
   $\Rightarrow b = k^2 + 2k^2\cdot\ln(k) \Rightarrow y_T = -2k^2 \cdot x +2k^2\ln(k) + k^2$
   Für P(0/0) gilt $0 = 2k^2\ln(k) + k^2 = k^2(2\cdot\ln(k) + 1) \Leftrightarrow k = 0 \vee k = e^{-0,5}$
   Für k = 0 oder $k=e^{-0,5}$ geht die Wendetangente durch den Ursprung.

b) Zeichnung selbst anfertigen
c) Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte
   a. $x = \ln(k)$ auflösen nach k : $x = \ln(k) \Leftrightarrow k = e^x$
   b. einsetzen für k in $y = k^2$ : $\Rightarrow y=e^{2x}$

Zur Verdeutlichung siehe aufgabe2.html

## ***Aufgaben zur Kugel sind zur Genüge vorhanden:***

(1) Gleichung der Kugel aufstellen können
(2) Schnitt Gerade – Kugel
(3) Gleichungen der Tangentialebenen bestimmen können
(4) Winkel zwischen Ebenen bestimmen können
(5) usw