M13 Kreis und Kugel

Nov/Dez 2004 - pl

Kreise in der Ebene

In der Ebene hat der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r die Gleichung

$$(\vec{x}-\vec{m}) = r^2$$

Ist M der Ursprung, so lautet die Kreisgleichung $\vec{x}^{\,2} = r^2$.

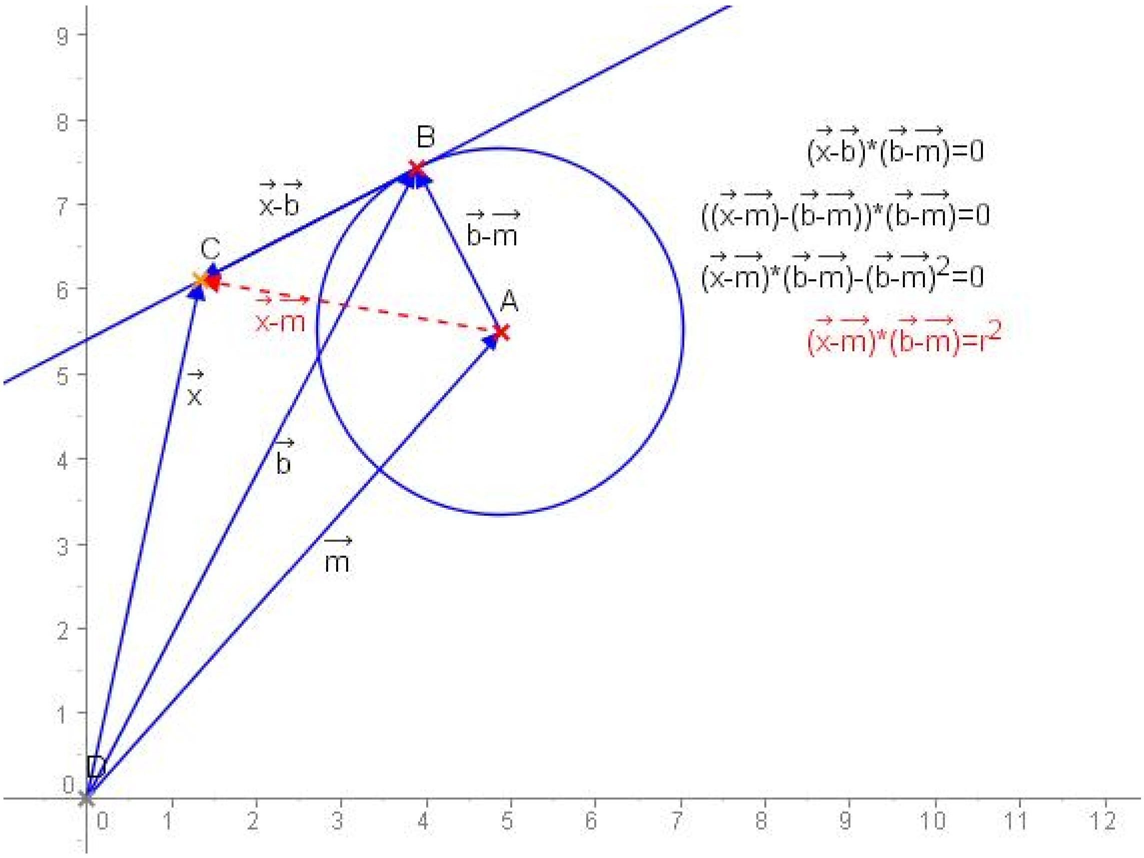
Aufgaben

(1) Bestimme die Kreisgleichung für k mit M(-3/5) und r=4.

(2) Die Gleichung $x_1^2+x_2^2-14x_1+6x_2+33=0$ stellt einen Kreis dar. Bestimme seinen Mittelpunkt und seinen Radius.

Die Tangente an den Kreis k: $(\vec{x}-\vec{m}) = r^2$ im Punkt B mit dem Ortsvektor $\vec{b}$ hat die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{b}-\vec{m}) = r^2$.

Bei einem Ursprungskreis k: $\vec{x}^{\,2}$ = r^2 lautet die Tangentengleichung $\vec{x}\bullet\vec{b}$= r^2.



Aufgaben

(3) Bestimme die Gleichung der Tangente an den Kreis k: M(4/-1) ; r=$\sqrt{5}$ im Punkt B(6/-2)

(4) Bestimme die Gleichungen der Tangenten von P(7/1) an den Kreis k: M(0/0); r=5.

Aufgaben und Lösungen

Gegeben:
Kreis um Mittelpunkt M (-3| 5) mit dem Radius r = 4 **gesucht:** Kreisgleichung

Durch Einsetzen der gegebenen Werte in die oben erstellte Vektorgleichung erhält man Folgendes:

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 5)^2 = 16$$

Bei einer weiteren Umformung sind Mittelpunkt und Radius nicht mehr sofort ablesbar:

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 10x_2 + 18 = 0$$

Gegeben:

Kreisgleichung **gesucht: K:** $x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 + 6x_2 + 33 = 0$ Mittelpunkt M, Radius r

$$x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 + 6x_2 + 33 = x_1^2 - 14x_1 + [\ \ ] + x_2^2 + 6x_2 + [\ \ ] + 33 - [\ \ ] = 0$$

Erweitert man die Gleichung geeignet mit quadratischen Ergänzungen, so ergeben sich binomische Terme und man erhält eine übersichtlichere Form der Kreisgleichung.

$$x_1^2 - 14x_1 + [49] + x_2^2 + 6x_2 + [9] + 33 - [49 + 9] = 0$$
$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 + 3)^2 = 25$$

An dieser Koordinatenform des Kreises lassen sich nun Mittelpunkt und Radius einfach ablesen:

M (7| -3) und r = 5.

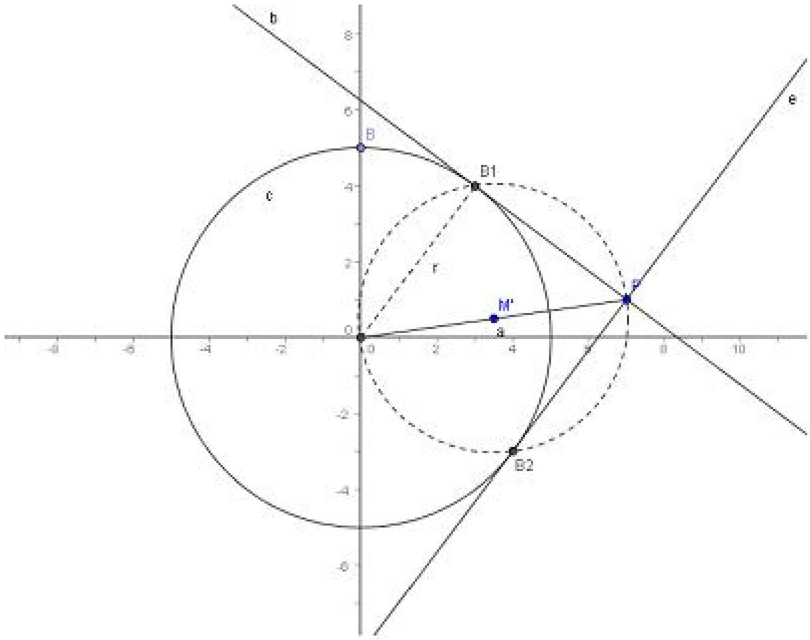
I
Aufgabe:
Bestimme die Gleichung der Tangente an den Kreis k: M(4/-1) ; r=$\sqrt{5}$ im Punkt B(6/-2).

$$t: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \bullet \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 5 \Rightarrow \text{t: } 2x_1 - x_2 = 14$$

Aufgabe:
Bestimme die Gleichungen der Tangenten von P(7/1) an den Kreis k: M(0/0); r=5.

Tangenten von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis konstruiert man mit Hilfe des Thaleskreises über der Strecke MP.

Den Mittelpunkt der Strecke OP bestimmt man als



M'($\frac{1}{2}$(O_x+P_x)/$\frac{1}{2}$(O_y+P_y)) also M'($\frac{7}{2}$/$\frac{1}{2}$).
Die Kreisgleichungen lauten :
k: $x_1^2+x_2^2=25$
k': $(x_1-\frac{7}{2})^2 + (x_2-\frac{1}{2})^2=(\frac{7}{2})^2+(\frac{1}{2})^2$
Die Schnittpunkte von k und k' sind die Berührpunkte der gesuchten Tangenten. Die Koordinaten müssen beide Kreisgleichungen erfüllen.

$$x_1^2 + x_2^2 = 25$$
$$x_1^2 - 7x_1 + x_2^2 - x_2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 25$$
$$7x_1 + x_2 = 25$$

$$x_2 = 25 - 7x_1 \quad \textit{in erste Gleichung einsetzen}$$
$$50x_1^2 - 350x_1 + 600 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_1 = 4$$
$$x_2 = 4 \vee x_2 = -3$$

Die Berührpunkte sind B_1(3/4) und B_2(4/-3)

Kugeln

Gegeben:
Kugel um Mittelpunkt M (2| -5| 3) mit dem Radius r = 4 **gesucht:** Kugelgleichung

Durch Einsetzen der gegebenen Werte in die oben erstellte Vektorengleichung erhält man Folgendes:

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 5)^2 + (x_3 - 3)^2 = 16$$

Bei einer weiteren Umformung sind Mittelpunkt und Radius nicht mehr sofort ablesbar:

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 22 = 0$$

Gegeben: Kugelgleichung $K: \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_1 - 14x_2 + 4x_3 + 44 = 0$
gesucht: Mittelpunkt M, Radius r

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_1 - 14x_2 + 4x_3 + 44 \\ &= x_1^2 + 8x_1 + [\;\;] + x_2^2 - 14x_2 + [\;\;] + x_3^2 + 4x_3 + [\;\;] + 44 = 0 \end{aligned}$$

Erweitert man die Gleichung geeignet mit quadratischen Ergänzungen, so ergeben sich Binomische Terme und man erhält eine übersichtlichere Form der Kugelgleichung.

$x_1^2 + 8x_1 + [\mathbf{16}] + x_2^2 - 14x_2 + [\mathbf{49}] + x_3^2 + 4x_3 + [\mathbf{4}] + 44 - [\mathbf{16} + \mathbf{49} + \mathbf{4}] = 0$

Wichtig! Die Summe der **fett** dargestellten Zahlen muss Null sein.

$$(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 + 2)^2 = 25$$

An dieser Koordinatenform der Kugel lassen sich nun Mittelpunkt und Radius einfach ablesen:

M (-4| 7| -2) und r = 5.

Kugeln und Geraden

Die Schnittpunkte der Geraden g: $\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{u}$ mit der Kugel k: $(\vec{x}-\vec{m}) = r^2$ erhält man aus der Gleichung: $(\vec{p}+\lambda\vec{u}-\vec{m})^2 = r^2$.
Einsetzen der Werte führt auf eine quadratische Gleichung für λ:

Die Gerade hat keinen Punkt mit k gemeinsam :	D<0
Die Gerade hat einen Punkt mit k gemeinsam :	D=0
Die Gerade schneidet den Kreis :	D>0

Aufgabe

Wie ist r für die Kugel mit M(2/-1/5) zu wählen, damit die Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-9\\10\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ die Kugel berührt?

Der Ansatz ergibt die Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda + (5 - 1/18\, r^2) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-1+\frac{1}{18}r^2}$

$\Rightarrow$ Gilt $-1 + \frac{1}{18}r^2 = 0$, dann gibt es nur eine Lösung.

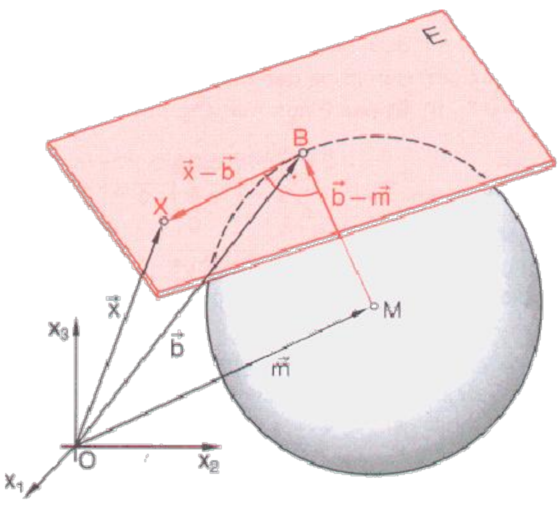
Kugeln und Ebenen

Tangentialebene
B = Berührpunkt der Tangentialebene an die Kugel
X = beliebiger Punkt der Tangentialebene
M = Mittelpunkt der Kugel
R = Radius der Kugel
Man weiß, daß das Skalarprodukt zweier aufeinander senkrecht stehender Vektoren gleich null ist. Dies nutzt man bei der Herleitung der Formel:

$$(\vec{b}-\vec{m})\cdot(\vec{x}-\vec{b}) = 0$$
$$(\vec{b}-\vec{m})^2 = r^2$$
$$(\vec{x}-\vec{b}) = (\vec{x}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m})$$

Durch Umformung erhält man eine Gleichung, die den Kugelradius beinhaltet:

$$(\vec{x}-\vec{b})\bullet(\vec{b}-\vec{m}) = 0$$
$$\left[(\vec{x}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m})\right]\bullet(\vec{b}-\vec{m}) = 0$$
$$(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{b}-\vec{m})-(\vec{b}-\vec{m})^2 = 0$$
$$(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{b}-\vec{m}) = (\vec{b}-\vec{m})^2$$
$$(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{b}-\vec{m}) = r^2$$



Aufgabe:
Welche Gleichung besitzt die Tangentialebene an die Kugel mit dem Mittelpunkt M (6| 3| 4) im Kugelpunkt B (2 |7 |2) ?

<u>Ansatz:</u>

$$(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{b}-\vec{m})=r^2$$

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}2-6\\7-3\\2-4\end{pmatrix}=\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}-4\\+4\\-2\end{pmatrix}=r^2$$

Nun fehlt nur noch der Radius r der Kugel:

$$r=(\vec{b}-\vec{m})=\sqrt{(b_1-m_1)^2+(b_2-m_2)^2+(b_3-m_3)^2}=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-2)^2}=6$$

Die Gleichung der Tangentialebene lautet also:

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=36$$

Aufgabe
Welche Gleichungen in Normalenform besitzen die Tangentialebenen in den gegebenen Punkten A (5 | -3| 4), B(1| -4 |3), C (1| -1| 0) an die Kugel mit der Gleichung:

k: $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right)^2=9$

<u>Ansatz:</u>

T_A: $(\vec{x}-\vec{a})\bullet(\vec{a}-\vec{m})=0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right)\bullet\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}\right)=0 \Rightarrow 2x_1-x_2+2x_3-21=0$

Welche Lage haben die Ebenen zueinander ?
Lösung
T_B: $2x_1+2x_2-x_3+9=0$
T_C: $2x_1-x_2+2x_3=3$
Die Ebenen liegen folgendermaßen:
$\vec{n}_A=\vec{n}_C \Rightarrow T_A // T_C$

$\vec{n}_A \bullet \vec{n}_B = 0 \Rightarrow T_A \perp T_B$
$\vec{n}_B \bullet \vec{n}_C = 0 \Rightarrow T_B \perp T_C$

Aufgabe

Welche Tangentialebenen an die Kugel k: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ = 841 liegen parallel zu der Ebene

E: $12x_1 - 16x_2 + 21x_3 = 17$

Lösung:
Zuerst sucht man sich die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und deren Richtungsvektor der Normalenvektor der Ebene ist:

Man weiß: M(4/-2/3) und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix}$

Nun schneidet man die Gerade g mit der Kugel K:

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 = 841 \quad \Rightarrow (12s)^2 + (-16s)^2 + (21s)^2 = 841 \Rightarrow s^2 = 1$$

Man erhält zwei Werte für s. Setzt man diese in die Geradengleichung ein, so erhält man zwei Schnittpunkte der Geraden mit der Kugel. Diese Schnittpunkte sind gleichzeitig die Berührpunkte der beiden gesuchten Tangentialebenen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix}$$

daraus folgt: B_1(16/-18/24) und B_2(-8/14/-18)

Die beiden gesuchten Tangentialebenen müssen durch jeweils einen dieser beiden Berührpunkte gehen. Gleichzeitig muss ihr Normalenvektor dem Normalenvektor der ursprünglichen Ebene entsprechen. Es ergibt sich daraus:

E_1: $\left(\vec{x} - \vec{b_1}\right) \bullet \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \\ 24 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 12x_1 - 16x_2 + 21x_3 - 984 = 0$

E_2: $\left(\vec{x} - \vec{b_2}\right) \bullet \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 21 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 12x_1 - 16x_2 + 21x_3 + 698 = 0$