Unbestimmtes Integral

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer reellen Funktion $f(x)$, wenn an jeder Stelle von D_f gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Das Aufsuchen einer Stammfunktion von $f(x)$ heißt **unbestimmtes Integrieren** und kann als Umkehroperation zum Differenzieren gedeutet werden.

$$\begin{array}{lcl} \text{differenzieren} \downarrow & f(x) = x^2 & \uparrow \text{integrieren} \\ & f'(x) = 2x & \end{array}$$

$f(x)$ ... Stammfunktion (die Stammfunktion wird oft mit einem Großbuchstaben gekennzeichnet: $F'(x) = f(x)$.)
Schreibweise:

$$\int 2x \,\mathrm{dx} = x^2$$

Problem: Differenziere:

$$\left.\begin{array}{ll} y & = x^2 \\ y & = x^2 - 1 \\ y & = x^2 + 5 \\ y & = x^2 + C \end{array}\right\} \Rightarrow y' = 2x$$

Eine Ableitung kann mehrere (nur von einer Konstanten C unterschiedliche) Stammfunktionen haben.
Allgemein:

$$\underbrace{\overbrace{\int}^{\text{Integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{Integrand}} \overbrace{\mathrm{dx}}^{\text{Integrationsvariable}}}_{\text{unbestimmtes Integral}} = F(x) + \underbrace{C}_{\text{Integrationskonstante } (C \in \mathbb{R})}$$

Integrationsregeln

Umkehrung der Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-11}$

$$\int x^n \,\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \in \mathbb{Q}, n \neq -1)$$

Konstanter Faktor: $(k \cdot x)' = k$

$$\int k \,\mathrm{dx} = k \cdot x + C$$

allgemein: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

$$\int a \cdot f(x) \,\mathrm{dx} = a \cdot \int f(x) \,\mathrm{dx}$$

Summenregel: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\int f(x) \pm g(x) \,\mathrm{dx} = \int f(x) \,\mathrm{dx} \pm \int g(x) \,\mathrm{dx}$$

Trigonometrische Funktionen: Sinus und Kosinus

$(\sin(x))' = \cos x$

$$\int \cos x \,\mathrm{dx} = \sin x + C$$

$(\cos(x))' = -\sin x$

$$\int \sin x \,\mathrm{dx} = -\cos x + C$$

Unbestimmte Integrale über Umkehrung der Differentiation ermitteln

(1) Funktionsterm so umformen, dass die Summen-, Faktor- bzw. Potenzregel angewendet werden kann	**Summenregel** $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ **Faktorregel** $\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ **Potenzregel** $\int x^q\, dx = \frac{1}{q+1} x^{q+1} + C \quad (q \neq -1)$
(2) Integrationsregeln anwenden; Grundintegrale beachten; Integrationskonstante C anfügen	$\int f(x)\, dx = F(x) + C$
(3) Probe durch Differentiation durchführen	$F'(x) = f(x)$

Berechne die unbestimmten Integrale

$$\int x^7\,dx,\ \int \frac{x^9}{7}\,dx,\ \int \frac{5}{6x^6}dx,\ \int \frac{7\sqrt[5]{x^2}}{6x^6},\ \int (3x-4\sin x+3\cos x)dx,\ \int \frac{x^2-1}{x^2},\ \int\left(x-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)dx$$

$$\int x^7\,\mathrm{dx} = \underline{\underline{\frac{x^8}{8}+C}}$$

$$\int \frac{x^9}{7}\,\mathrm{dx} = \underline{\underline{\frac{x^{10}}{70}+C}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{6x^6}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{5}{6}\cdot x^{-6}\,\mathrm{dx} = \\ &= \frac{5}{6}\cdot x^{-5}\cdot\frac{1}{(-5)}+C = \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{6x^5}+C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{7\sqrt[5]{x^2}}{3}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{7}{3}\cdot x^{\frac{2}{5}}\,\mathrm{dx} = \\ &= \frac{7}{3}\cdot\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+C = \\ &= \frac{7}{3}\frac{5}{7}\cdot x^{\frac{7}{5}}+C = \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{3}\cdot x\cdot\sqrt[5]{x^2}+C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int (3x-4\sin x+3\cos x)\ \mathrm{dx} = \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}x^2+4\cos x+3\sin x+C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^2}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \\ &= \int 1-x^{-2}\,\mathrm{dx} = \\ &= x-\frac{x^{-1}}{-1}+C = \\ &= \underline{\underline{x+\frac{1}{x}+C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\left(x-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\,\mathrm{dx} &= \int x\,\mathrm{dx}-\int\frac{\sqrt{2}}{x}\,\mathrm{dx} = \\ &= \underline{\underline{\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}\cdot\ln|x|+C}}\end{aligned}$$

Ist $f(x)$ eine auf $[a;b]$ beschränkte reelle Funktion und $F(x)$ auf $[a;b]$ Stammfunktion von $f(x)$, so wird dem Symbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ der Zahlenwert $F(b) - F(a)$ zugeordnet:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Man liest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ als „Integral von f von x dx zwischen (den Grenzen) a und b".
Man schreibt als Zwischenergebnis für $F(b) - F(a)$ auch $F(x)|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$.
Bei bestimmten Integralen wird wegen

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

die Stammfunktion F ohne Integrationskonstante C angeschrieben.

Bestimmte Integrale mittels Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermitteln

(1)	Eine Stammfunktion F(x) des Integranden f(x) ermitteln	$\int f(x)\,dx = F(x)$
(2)	Werte der Stammfunktion F(x) an der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals ermitteln	F(b) und F(a)
(3)	Differenz bilden	$F(b) - F(a)$
(4)	Differenz als Wert des bestimmten Integrals interpretieren	$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Bestimmtes Integral – Übungen

Welcher Unterschied besteht zwischen den Integralen $\int_0^1 ax^2\,dx$ und $\int_0^1 ax^2\,da$?

$$\int_0^1 ax^2\,\mathrm{dx} = a\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = a\cdot\frac{1}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{a}{3}}}$$

$$\int_0^1 ax^2\,\mathrm{da} = \frac{a^2}{2}\cdot x^2\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}x^2 - 0 = \underline{\underline{\frac{x^2}{2}}}$$

Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\int_0^x p\,dp = 7$ in $\Re$!

$$\frac{p^2}{2}\bigg|_0^x = 7$$

$$\frac{x^2}{2} - 0 = 7$$

$$x^2 = 14$$

$$x = \pm\sqrt{14}$$

$$\underline{\underline{L = \{-\sqrt{14}; \sqrt{14}\}}}$$

Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\int_x^2 (y^2 - 2y + 3)\ dy = \frac{7}{3}$!

$$\int_x^2 (y^2 - 2y + 3)\ \mathrm{dy} = \frac{7}{3}$$

$$\left[\frac{y^3}{3} - y^2 + 3y\right]_x^2 = \frac{7}{3}$$

$$\left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) = \frac{7}{3}$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x = \frac{7}{3}$$

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 7 = 0$$

erste Lösung erraten: $x_1 = 1$
Polynomdivision:

$$(x^3 - 3x^2 + 9x - 7) : (x - 1) = \underline{x^2 - 2x + 7}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - x^2} \\ \quad -2x^2 + 9x \\ \quad \underline{-2x^2 + 2x} \\ \qquad 7x - 7 \\ \qquad \underline{7x - 7} \\ \qquad\ 0\text{R.} \end{array}$$

$$x^2 - 2x + 7 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-7} = 1 \pm \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ keine weiteren Lösungen

$$\underline{\underline{L = \{1\}}}$$

Weitere Übungen mit Lösungen

(1) $$\boxed{\int_1^3 \left(5x^2-3x+7\right)dx} = \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+7x\right]_1^3}_{F(x)} = \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}\cdot 27-\tfrac{3}{2}\cdot 9+21\right]}_{F(3)} - \underbrace{\left[\tfrac{5}{3}-\tfrac{3}{2}+7\right]}_{F(1)}$$

$$= 45-\tfrac{27}{2}+21-\tfrac{5}{3}+\tfrac{3}{2}-7$$

$$= 59-12-\tfrac{5}{3} = 47-\tfrac{5}{3} = 45\tfrac{1}{3} = \tfrac{136}{3}$$

(2) $$\boxed{\int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^2-2x+1\right)dx} = \left[\tfrac{1}{20}x^5+\tfrac{1}{9}x^3-x^2+x\right]_0^2 = \left[\tfrac{32}{20}+\tfrac{8}{9}-4+2\right]-\left[0\right]$$

$$= \tfrac{8}{5}+\tfrac{8}{9}-2 = \tfrac{72+40-90}{45} = \tfrac{22}{45}$$

(3) $$\boxed{\int_{-1}^5 \left(x^4+x^2\right)dx} = \left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^5 = \left[5^4+\tfrac{1}{3}5^3\right]-\left[-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{3}\right] = 5^3\left(5+\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}$$

$$= 125\cdot\tfrac{16}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{2001}{3}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{10008}{15} \approx 667{,}2$$

(4) $$\boxed{\int_1^3 \left(\tfrac{1}{2}x^3+3x^2+x-7\right)dx} = \left[\tfrac{1}{8}x^4+x^3+\tfrac{1}{2}x^2-7x\right]_1^3 =$$

$= \left[\tfrac{81}{8}+27+\tfrac{9}{2}-21\right]-\left[\tfrac{1}{8}+1+\tfrac{1}{2}-7\right]$ Zuerst Brüche mit gleichen Nennern addieren:

$$= \tfrac{80}{8}+\tfrac{8}{2}+6+6 = 10+4+12 = 26$$

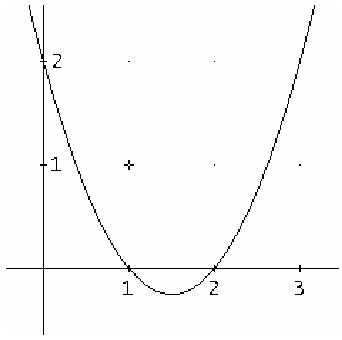
(5) $$\boxed{\int_{-1}^1 \left(x^2+1\right)dx} = \int_{-1}^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^2 =$$

$= \left[\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right]-\left[-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{3}-1\right]$ Klammert man aus der 2. Klammer (-1) aus, ist sie identisch gleich zur ersten Klammer, also kommt diese doppelt vor:

$$= 2\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right) = 2\cdot\tfrac{3+10+15}{15} = 2\cdot\tfrac{28}{15} = \tfrac{56}{15}$$

Bestimmtes Integral - Flächenberechnungen

Berechne die Fläche A zwischen der Funktion f(x) = x^2-3x + 2, der x-Achse und den Ordinaten in den Punkten x_1= 0 und x_2=3.



1. **Nullstellen berechnen**

   0=x^2-3x+2

   $$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

   $$x_1 = 2 \vee x_2 = 1$$

2. **Flächen berechnen**

$$A = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 f(x)\,dx\right| + \left|\int_2^3 f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \left(x^2 - 3x + 2\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(x^2 - 3x + 2\right)dx\right| + \left|\int_2^3 \left(x^2 - 3x + 2\right)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right]\right| + \left|\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right)\right]_1^2\right| + \left|\left[\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2} + 6\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4\right)\right]_2^3\right|$$

$$= \frac{5}{6} + \left|-\frac{1}{6}\right| + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$