

Übungen: Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse

1. Ein Kapital von 1000 € wird mit 8% Zinsen angelegt.
 - a. In welcher Zeit verdoppelt sich das Kapital?
 - b. Zeige, dass die Verdopplungszeit nicht davon abhängt, wie groß das Anfangskapital ist!

2. Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich jede Stunde.
 - a. Stelle die Anzahl der Bakterien nach t Stunden als Funktion der Zeit dar.
 - b. Wieviele Bakterien sind nach 2,5 Stunden vorhanden?
 - c. Wann wird sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht haben?
 - d. Das Wachstum der Bakterien lässt sich durch die Formel

$$B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda t}$$

beschreiben (B_0 = Anfangswert). Berechne die Konstante λ !

3. Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,5%. Derzeit beträgt sie 12 Millionen.
 - a. Wie groß wird die Bevölkerung in 10 Jahren sein?
 - b. Wann wird das Land 15 Millionen Einwohner haben?
 - c. Der Bevölkerungszuwachs lässt sich durch die Formel

$$B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda t} \text{ beschreiben. Berechne die Konstante } \lambda!$$

4. Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel

$$B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda t}$$

1960 gab es ca. 3 Mrd. Menschen, 1995 ca. 5,6 Mrd.

- a. Bestimme die Konstante λ !
 - b. Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
 - c. Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben, wenn die Bevölkerung im selben Tempo weiterwächst?
5. Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7000 m^3 . Ohne Einschlag ist er inzwischen auf 9880 m^3 angewachsen. Man darf annehmen, dass das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.
 - a. Zeige, dass die jährliche Wachstumsrate ca. 3,5% beträgt.
 - b. Berechne die Zeitspanne, innerhalb der sich der Holzbestand verdoppelt bzw. verdreifacht.
 - c. Man hat vor, in 3 Jahren 3000 m^3 Holz zu schlägern. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?
 6. Ein Lichtstrahl, der ins Wasser fällt, wird pro Meter Wassertiefe um 10% schwächer.
 - a. Stelle die Lichtstärke $L(x)$ als Funktion der Wassertiefe dar (Tiefe in Metern = x , Lichtstärke an der Oberfläche = L_0).
 - b. Wie stark ist das Licht in 10 m Tiefe?

- c. In welcher Tiefe beträgt die Lichtstärke nur mehr ein Zehntel des ursprünglichen Wertes?

7. Der radioaktive Zerfall eines Elements lässt sich durch die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

beschreiben (N_0 = Anfangswert). Die Zeit τ , in der von einer vorhandenen Stoffmenge die Hälfte zerfällt, heißt Halbwertszeit. Für Radium beträgt sie z.B. 1620 Jahre.

- Berechne die Zerfallskonstante λ !
- Wieviel ist von dem ersten Gramm Radium, das Marie Curie 1898 herstellte, noch übrig? (Rechne mit $t = 100$.)
- Wann wird nur mehr 0,1 g vorhanden sein?

8. Das Kohlenstoffisotop ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren. Mit seiner Hilfe lässt sich das Alter von Fossilien bestimmen.
- Berechne die Zerfallskonstante λ !
 - In einem Fossil wurde ein ^{14}C -Gehalt von 7,5% der ursprünglichen Menge gemessen. Berechne das Alter des Fossils.
 - Bis zu welchem Alter lässt sich die ^{14}C -Methode anwenden, wenn man noch 1% des ursprünglichen ^{14}C -Gehalts mit hinreichender Genauigkeit messen kann?

9. Vervollständige die folgende Tabelle:

Element	Halbwertszeit	λ	Abnahme pro Zeiteinheit in %	Wann ist noch 1% übrig?
Radium	1620 Jahre			
Caesium 137		0,0231 (t in Jahren)		
Phosphor 32		0,0485 (t in Tagen)		
Jod 131	8 Tage			
Polonium 218			20% / Minute	

10. Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert. Angenommen, die Vermehrung erfolgt exponentiell, d.h. nach der Formel

$$B(t) = a \cdot e^{\lambda t}$$

(a ist der Anfangswert).

- Berechne die Konstante λ !
- Wieviel Prozent beträgt die jährliche Vermehrung?
- Wann hat sich die Population verdoppelt bzw. vervierfacht?

Ergebnisse (Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse)

1.
 - a. ca. 9 Jahre
 - b. $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1,08^t$; das Ergebnis hängt nicht von K_0 ab
2.
 - a. $B(t) = 1000 \cdot 2^t$
 - b. 5657
 - c. nach 3,3 Stunden
 - d. 0,6931
3.
 - a. 13,9 Mill.
 - b. in 15 Jahren
 - c. 0,0149
4.
 - a. 0,0178
 - b. 1,8%
 - c. ca. 2050
5.
 - a. $7000 \cdot 1,035^{10} \gg 9880$
 - b. ca. 20 Jahre bzw. ca. 32 Jahre
 - c. in 9,3 Jahren (6,3 Jahre nach der Schlägerung)
6.
 - a. $L(x) = L_0 \cdot 0,9^x$
 - b. ca. 35% des ursprünglichen Werts
 - c. ca. 22 m
7.
 - a. 0,000428
 - b. 0,958 g
 - c. nach 5382 Jahren (im Jahr 7280)
8.
 - a. 0,000121
 - b. ca. 21000 Jahre
 - c. ca. 38000 Jahre
- 9.

Radium	1620 J.	0,0004279	0,043 %	nach 10763 J.
Caesium 137	30 J.	0,0231	2,28 %	nach 199 J.
Phosphor 32	14,3 T.	0,0485	4,73%	nach 95 T.
Jod 131	8 T.	0,08664	8,3 %	nach 53 T.
Polonium 218	3,1 Min.	0,2231	20 %	nach 20,6 Min.

10.
 - a. 0,0446
 - b. 4,56%
 - c. 15,5 Jahre bzw. 31 Jahre