M12 Flugzeugkurse

11.02.2007

Kurs Flugzeug A

#1: $a(t) := [-35, 50, 10] + t \cdot [0.15, -0.15, 0]$

Kurs Flugzeug B

#2: $b(s) := [-25, 15, 9] + s \cdot [0.1, -0.05, k]$

Gleichsetzen der Geradengleichung ergibt Wert von k für eine direkte Kollision

#3: $a(t) = b(s)$

#4: $k = \frac{1}{500} \wedge s = 500 \wedge t = 400$

Berechnung des minimalen Abstandes für k=0.001 ; Wahl zweier Punkte A und B, die auf den Geraden liegen

#5: $A := [0.15 \cdot t - 35, 50 - 0.15 \cdot t, 10]$

#6: $B := [0.1 \cdot s - 25, 15 - 0.05 \cdot s, 0.001 \cdot s + 9]$

#7: $AB := B - A$

#8: $AB := [0.1 \cdot s - 0.05 \cdot (3 \cdot t - 200), 0.05 \cdot (3 \cdot t - 700) - 0.05 \cdot s, 0.001 \cdot s - 1]$

#9: $AB \cdot [0.15, -0.15, 0] = 0 \wedge AB \cdot [0.1, -0.05, 0.001] = 0$

#10: $s = 500.3996802 \wedge t = 400.1998401$

Flugzeug A benötigt von P zu A ca. 400 Sekunden, Flugzeug B benötigt ca 500 Sekunden von Q zu B

#11: $|AB|$

#12: $\text{Abstand} := 0.4998001199 \text{ km}$

Die Flugzeuge fliegen verschieden schnell und sind nicht zum gleichen Zeitpunkt in den Punkten A und B. Sei sind in Wirklichkeit weiter als 0.5 km voneinander entfernt. Nach t Sekunden von P bzw Q aus gerechnet, befindet sich Flugzeug A im Punkt

#13: $A1 := [0.15 \cdot t - 35, 50 - 0.15 \cdot t, 10]$

und Flugzeug B im Punkt

#14: $B1 := [0.1 \cdot t - 25, 15 - 0.05 \cdot t, 0.001 \cdot t + 9]$

#15: $B1 - A1$

#16: $A1B1=B1-A1=[10 - 0.05 \cdot t, 0.1 \cdot t - 35, 0.001 \cdot t - 1]$

$$\text{Abstand}=|A1B1|=\sqrt{(10-0{,}05t)^2+(-35+0{,}1t)^2+(-1+0{,}001t)^2}$$

Gesucht ist das Minimum des Wurzelausdrucks, dies ist dasselbe, wie das Minimum des Radikanden

#17: $d(t) := 0.012501\cdot t^2 - 8.002\cdot t + 1326$

#18: $d1(t) := \frac{d}{dt}(0.012501\cdot t^2 - 8.002\cdot t + 1326)$ (1.Ableitung)

#19: $d1(t) := 0.025002\cdot t - 8.002$

#20: $d1(t) = 0$

#21: $t = 320.0543956$

#22: $d2(t) := \frac{d}{dt} d1(t)$ (2.Ableitung)

#23: $d2(t) := 0.025002$

Die zweite Ableitung ist an dieser Stelle größer als Null, nach ca 320 Sekunden ist also der minimale Abstand erreicht.

Wir setzen in A1 und B1 den errechneten Wert für t ein und bestimmen |A1B1|

#24: $[0.1\cdot t - 25,\ 15 - 0.05\cdot t,\ 0.001\cdot t + 9] - [0.15\cdot t - 35,\ 50 - 0.15\cdot t,\ 10]$

#25: $|[-6.002719779,\ -2.994560439,\ -0.6799456044]| = 6.742578365$

#26: MinAbstand := 6.742578365km

Geschwindigkeiten

#27: $va := |[0.15,\ -0.15,\ 0]|$

#28: $va := 0.2121320343$

Flugzeug A hat eine Geschwindigkeit von 0.2121320343 km/s

#29: $vb := |[0.1,\ -0.05,\ 0.001]|$

#30: $vb := 0.1118078709$

Flugzeug B fliegt mit einer Geschwindigkeit von 0.1118078709 km/s

Zu bestimmen sind Werte für k, für die die Flugzeuge gerade den Mindestabstand einhalten;
A2 und B2 sind zwei Punkte auf den Kursgeraden:

#31: $A2 := [-35, 50, 10] + t\cdot[0.15, -0.15, 0]$

#32: $B2 := [-25, 15, 9] + s\cdot[0.1, -0.05, k]$

Bestimmung der Koordinaten der Lotfußpunkte

#33: $A2B2 := B2 - A2$

#34: $A2B2 := [0.1\cdot s - 0.05\cdot(3\cdot t - 200), 0.05\cdot(3\cdot t - 700) - 0.05\cdot s, k\cdot s - 1]$

#35: $A2B2\cdot[0.15, -0.15, 0] = 0 \wedge A2B2\cdot[0.1, -0.05, k] = 0$

#36: $400\cdot k^2\cdot s - 400\cdot k + 5\cdot s - 9\cdot t = -1100 \wedge s - 2\cdot(t - 150) = 0$

#37: $$s = \frac{100\cdot(8\cdot k + 5)}{800\cdot k^2 + 1} \wedge t = \frac{400\cdot(300\cdot k^2 + k + 1)}{800\cdot k^2 + 1}$$

Aus den Werten für s und t ergeben sich die Koordinaten der Lotfußpunkte

#38: $A2 := [-35, 50, 10] + t\cdot[0.15, -0.15, 0]$

#39: $$A2 := \left[\frac{15\cdot(8\cdot k + 5)}{2\cdot(800\cdot k^2 + 1)} - \frac{25}{2}, \frac{55}{2} - \frac{15\cdot(8\cdot k + 5)}{2\cdot(800\cdot k^2 + 1)}, 10\right]$$

#40: $B2 := [-25, 15, 9] + s\cdot[0.1, -0.05, k]$

#41: $$B2 := \left[\frac{10\cdot(8\cdot k + 5)}{800\cdot k^2 + 1} - 25, 15 - \frac{5\cdot(8\cdot k + 5)}{800\cdot k^2 + 1}, \frac{500\cdot k - 1}{800\cdot k^2 + 1} + 10\right]$$

Der minimal zulässige Abstand beträgt 1 km, es muß also |A2B2|=1 gelten.
Daraus lassensich die gesuchte3n Werte für k berechnen

#42: $$\left|\left[\frac{10\cdot(8\cdot k + 5)}{800\cdot k^2 + 1} - 25, 15 - \frac{5\cdot(8\cdot k + 5)}{800\cdot k^2 + 1}, \frac{500\cdot k - 1}{800\cdot k^2 + 1} + 10\right] - \left[\frac{15\cdot(8\cdot k + 5)}{2\cdot(800\cdot k^2 + 1)} - \frac{25}{2}, \frac{55}{2} - \frac{15\cdot(8\cdot k + 5)}{2\cdot(800\cdot k^2 + 1)}, 10\right]\right| = 1$$

#43: $k = 0.004012841091 \vee k = 0$