Exponential- und Logarithmusfunktion

1) **Bestimme auf der Grundlage der Definitionsgleichung $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a x$:**

(a) $\log_2 16 = c \Leftrightarrow 2^c = 16 \Leftrightarrow c=4$

(b) $\log_3 9 = c \Leftrightarrow 3^c = 9 \Leftrightarrow c=2$

(c) $\log_2 \frac{1}{64} = c \Leftrightarrow 2^c = 2^{-6} \Leftrightarrow c=-6$

(d) $\log_2 \sqrt{32} = c \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$

(e) $\log_2 y = 3 \Leftrightarrow 2^3 = y \Leftrightarrow y=8$

(f) $\log_{10} y = 5 \Leftrightarrow 10^5 = y \Leftrightarrow y = 100\,000$

(g) $\log_2 y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{3}} = y \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{2}$

(h) $\log_4 y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{\frac{-1}{2}} = y \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

(i) $\log_a \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a=3$

(j) $\log_a \sqrt{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{8} \Leftrightarrow a=8$

(k) $\log_a 7 = 1 \Leftrightarrow a^1 = 7 \Leftrightarrow a=7$

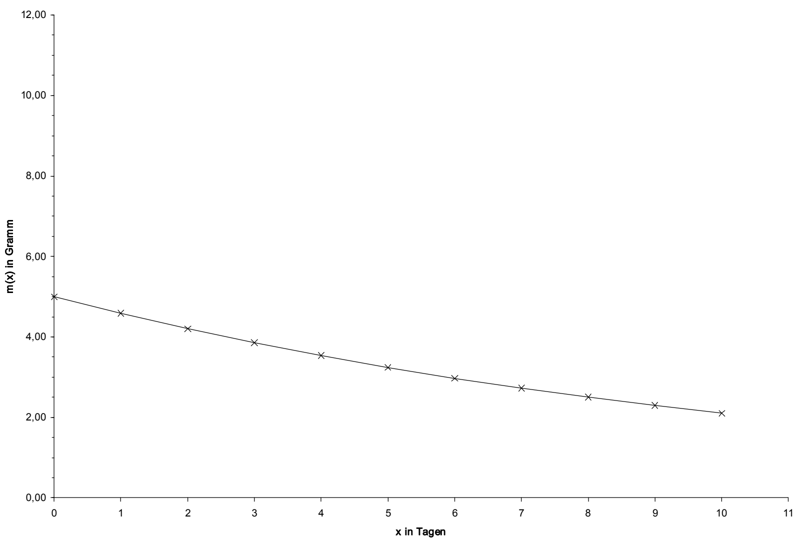
(l) $\log_a \sqrt[4]{8} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow a=2$

2) Radioaktives Jod 131 zerfällt nach der Funktionsgleichung $m(x) = m_0 \left(\sqrt[8]{\frac{1}{2}}\right)^x$. Dabei bedeutet m_0 die Ausgangsmasse und m die vorhandene Masse nach x Tagen.

a) Lege eine Wertetabelle für den Zerfall von 5g Jod 131 an und zeichne den Graphen der Funktion.

b) Bestimme aus dem Graphen der Funktion, welche Menge Jod 131 nach einem Tag noch vorhanden ist und nach wie viel Tagen sich die Ausgangsmenge halbiert hat!

x in Tagen	m(x) in g
0	5,00
1	4,59
2	4,20
3	3,86
4	3,54
5	3,24
6	2,97
7	2,73
8	2,50
9	2,29
10	2,10



3) In Medizin und Technik werden Röntgenstrahlen durch Bleiplatten entsprechender Dicke abgeschirmt. Als grober Richtwert gilt: 1mm Dicke entspricht 5% Strahlungsabnahme. Berechne die notwendige Dicke der Bleiabschirmung, wenn die Strahlung auf $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Strahlung reduziert werden soll.

Die Strahlungsintensität hängt von d (in mm gemessen) ab. Sie verringert sich exponentiell mit der Zeit t (in Tagen).

(1) Ansatz: $I(d) = I_0 \cdot q^{k \cdot d}$ mit $q = (1-0{,}05) = 0{,}95$, also $I(d) = I_0 \cdot 0{,}95^{k \cdot d}$

(2) Bestimmung von k:

Für d=1 gilt $I(d) = 0{,}95 \cdot I_0$ (Strahlungsabnahme bei 1 mm Abschirmung) $\Rightarrow 0{,}95 \cdot I_0 = I_o \cdot 0{,}95^{k \cdot 1}$

$\Rightarrow 0{,}95 = 0{,}95^k \Leftrightarrow \underline{\underline{k=1}}$

Es gilt also $\underline{I(d) = I_0 \cdot 0{,}95^d}$

(3) Lösung der Aufgabe: $I(d)=1/10 \cdot I_0$ $\Rightarrow 1/10 I_0 = I_0 \cdot 0{,}95^d$ $\Leftrightarrow d = \dfrac{\ln(\frac{1}{10})}{\ln(0{,}95)} \approx 44{,}9$

4) Die Abkühlung einer Tasse Kaffee verläuft nach dem Gesetz $T(t) = T_0 e^{-ct}$. Dabei ist t die Zeit in Minuten, T die Temperatur in ^oC. Zur Zeit t = 2 in wird T = 64 ^0C, für t = 10 min wird T = 33,5 ^0C gemessen. Bestimme die Werte T_0 und c!

(1) $64=T_0 \cdot e^{-2c}$ und $33{,}5 = T_0 \cdot e^{-10c} \Leftrightarrow \dfrac{64}{33{,}5} = \dfrac{e^{-2c}}{e^{-10c}} = e^{8c} \Leftrightarrow \ln(\frac{64}{33{,}5}) = 8c \Leftrightarrow c \approx \underline{\underline{0{,}0809}}$

$T(t) = T_0 \cdot e^{-0{,}0809\, t}$

(2) $64 = T_0 \cdot e^{-0{,}0809 \cdot 2} \Leftrightarrow T_0 = \dfrac{64}{e^{-0{,}0809 \cdot 2}} \approx \underline{\underline{75{,}24}}$

(3) $T(t) = 75{,}24 \cdot e^{-0{,}0809t}$

5) **Löse nach x auf**:

(a) $3 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^x - 2 = 0$
$3 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^x - 2 = 0$

Setze $3^x = u \Rightarrow 3 \cdot u^2+5u-2=0 \Leftrightarrow u^2+\dfrac{5}{3}u - \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow u_{1,2}=\dfrac{-5}{6} \pm \sqrt{\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{2}{3}}$

$u_1=\dfrac{1}{3}$ v $u_2 =-2$ (entfällt, denn $-2 \neq 3^x$ für alle $x \in R$) $\Rightarrow \dfrac{1}{3} = 3^x \Leftrightarrow x=-1 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{-2}+5 \cdot 3^{-1}-2=0$ (w)

(b) $3^x \cdot 4^x = 5^x \Leftrightarrow x=0$, denn $3^0 \cdot 4^0=5^0$ (w)

(c) $2^{t^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-t} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow 2^{t^2} \cdot \left(2^{-1}\right)^{-t} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow 2^{t^2} \cdot 2^t = 2 \Leftrightarrow 2^{t^2+t} = 2 \Leftrightarrow t^2+t=1 \Leftrightarrow$

$t_{1,2}=-\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$ Probe ? ;-))