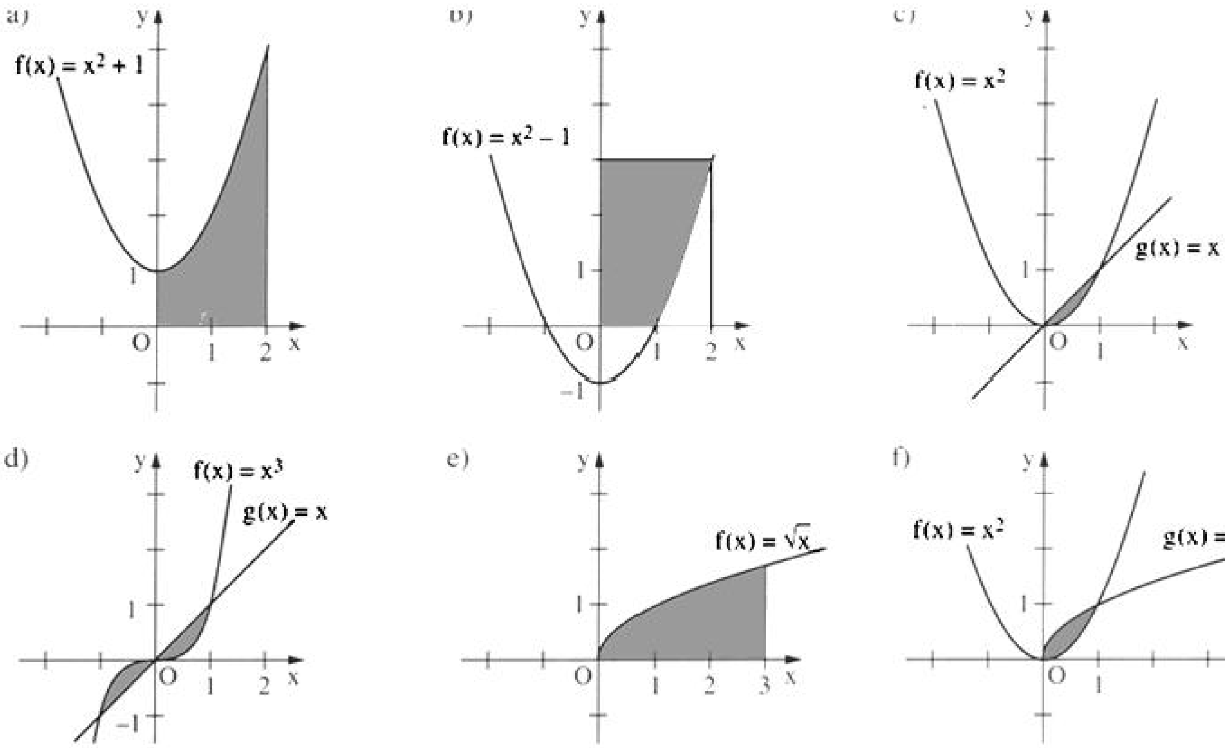
Übungen vor der Klausur 1

1.) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\int \frac{1}{x^{2/3}} \, dx$$

2.) Bestimmen Sie die Inhalte der folgenden markierten Flächen!



3.) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

$$\int_{1}^{2} \frac{2\cdot x - 4}{x^3}\,dx$$

$$\int_{2.3}^{4.6} \frac{5.6\cdot x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_{0}^{x} (t^2 - 1)\cdot(t^2 + 1)\,dt$$

4.) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch den Graphen der Funktion f und der x-Achse vollständig begrenzt wird!

$$f(x) := x^5 - 10\cdot x^3 + 9\cdot x$$

$$g(x) := x^5 + x^3 - 12\cdot x$$

5.) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktionen f und g im vorgegebenen Intervall!

$$f(x) := -x^2 - 6\cdot x$$

$$g(x) := \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{5}{2}$$

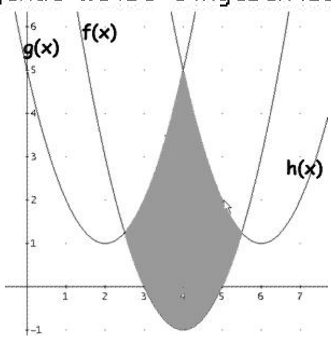
[-3, 0]

6.) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f, g und h auf die folgende Weise eingeschlossen wird:

$$f(x) := (x - 4)^2 - 1$$

$$g(x) := x^2 - 4\cdot x + 5$$

$$h(x) := x^2 - 12\cdot x + 37$$



Lösungen 1

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$\int \frac{1}{x^{2/3}} \, dx = 3 \cdot x^{1/3}$$

Lösungen 2

$$\int_0^2 (x^2 + 1) \, dx = \frac{14}{3}$$

b) Rechteck - Parabel:

$$6 - \int_1^2 (x^2 - 1) \, dx = \frac{14}{3}$$

c)

$$\left| \int_0^1 (f - g) \, dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - x) \, dx \right| = \frac{1}{6}$$

d)

$$x^3 = x$$

$$x = -1 \vee x = 1 \vee x = 0$$

$$\left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) \, dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) \, dx \right| = \frac{1}{2}$$

e)

$$\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = 2\cdot\sqrt{3}$$

f)

$$x^2 - \sqrt{x} = 0$$
$$x = 1 \lor x = 0$$

$$\left|\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})\,dx\right| = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3a)

$$\int_1^2 \frac{2\cdot x - 4}{x^3}\,dx = \int_1^2 (2\cdot x - 4)\cdot x^{-3}\,dx = \int_1^2 (2\cdot x^{-2} - 4\cdot x^{-3})\,dx = 0.5$$

Aufgabe 3b)

$$\int_{2.3}^{4.6} \frac{5.6\cdot x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{2.3}^{4.6} 5.6\cdot x\cdot x^{-1/2}\,dx = \int_{2.3}^{4.6} 5.6\cdot x^{1/2}\,dx = 23.81037182$$

Aufgabe 3c)

$$\int_0^x (t^2 - 1)\cdot(t^2 + 1)\,dt = \int_0^x (t^4 - 1)\,dt = \frac{x^5}{5} - x$$

Aufgabe 4a)

$f(x) := x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x$

Nullstellen berechnen:

$x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x = 0$

$x = -3 \lor x = 3 \lor x = -1 \lor x = 1 \lor x = 0$

Integrieren

$$\left|\int_{-3}^{-1} (x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x)\, dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x)\, dx\right| + \left|\int_{1}^{3} (x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x)\, dx\right|$$

$$\frac{269}{3}$$

Aufgabe 4b)

$f(x) := x^5 + x^3 - 12 \cdot x$

Nullstellen berechnen:

$f(x) = 0$

$x^5 + x^3 - 12 \cdot x = 0$

$x = -\sqrt{3} \lor x = \sqrt{3} \lor x = 0$

Integrieren

$$\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^5 + x^3 - 12 \cdot x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^5 + x^3 - 12 \cdot x)\, dx\right|$$

$$= \frac{45}{2}$$

Aufgabe 5

Schnittstellen berechnen:

$$-x^2 - 6\cdot x = \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{5}{2}$$

$$-x^2 - 6\cdot x - \frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{5}{2} = 0$$

$$-\frac{5\cdot x^2}{4} - 6\cdot x + \frac{5}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{24\cdot x}{5} - 2 = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{194}}{5} - \frac{12}{5} \vee x = \frac{\sqrt{194}}{5} - \frac{12}{5}$$

$$x = 0.38567 \vee x = -5.1856$$

Integrieren
Da im angegebenen Intervall keine Schnittstelle liegt, sind die Intervallgrenzen auch die Integrationsgrenzen.

$$\left|\int_{-3}^{0} \left(-x^2 - 6\cdot x - \left(\frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{5}{2}\right)\right) dx\right|$$

$$=\frac{93}{4} = 23.25$$

Aufgabe 6

Schnittstellen von g(x) mit f(x) und h(x) mit f(x) berechnen:

$$(x-4)^2 - 1 = x^2 - 4\cdot x + 5$$

$$x^2 - 8\cdot x + 16 - 1 - x^2 + 4\cdot x - 5 = 0$$

$$10 - 4\cdot x = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$(x-4)^2 - 1 = x^2 - 12\cdot x + 37$$

$$x^2 - 8\cdot x + 16 - 1 - x^2 + 12\cdot x - 37 = 0$$

$$4\cdot x - 22 = 0$$

$$x = \frac{11}{2}$$

Schnittstelle von g(x) mit h(x) berechnen

$$x^2 - 4\cdot x + 5 = x^2 - 12\cdot x + 37$$

$$x^2 - 4\cdot x + 5 - (x^2 - 12\cdot x + 37) = 0$$

$$8\cdot x - 32 = 0$$

$$x = 4$$

Die Fläche ist symmetrisch zu $x = 4$

$$2\cdot\left(\int_{5/2}^{4} (x^2 - 4\cdot x + 5)\, dx + \left|\int_{5/2}^{4} ((x-4)^2 - 1)\, dx\right|\right)$$

$$= 9$$

9