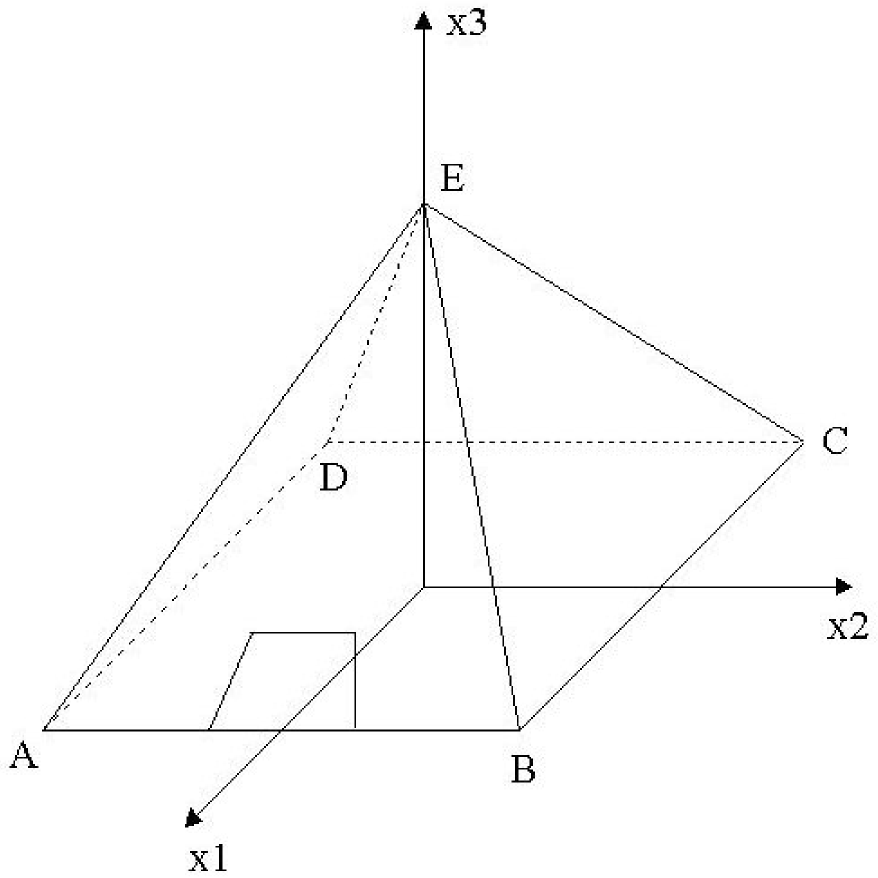
64 Die gläserne Pyramide

a) ***Festlegung eines räumlichen Koordinatensystems***



A(17,7/- 17,7/0); B(17,7/17,7/0); C(- 17,7/17,7/0), D(-17,7/- 17,7/0); E(0/0/21,65)

Ebene E_1 durch die Punkte A,B und E

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 17{,}7 \\ -17{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -17{,}7 \\ 17{,}7 \\ 21{,}65 \end{pmatrix}$$

Normalenform von E_1:

$$\begin{pmatrix} 21{,}65 \\ 0 \\ 17{,}7 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 17{,}7 \\ -17{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Neigung der Ebene E_1:
Winkel zwischen E_1 und der x_1x_2-Ebene

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 21{,}65 \\ 0 \\ 17{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{21{,}65^2 + 17{,}7^2}}, \text{ also } \alpha \approx 50{,}7°$$

Die Dachneigung beträgt $\tan(\alpha) \approx 1{,}22 \approx 122\%$.

Alternative Lösung ohne Vektorrechnung: $\tan(\alpha) = \frac{21{,}65}{17{,}7} \approx 1{,}22$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der quadratischen Pyramide haben alle vier Seitenflächen dieselbe Neigung.

Winkel zwischen zwei Seitenflächen:

Ebene E_2 durch die Punkte B,C und E

$$E_2\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 17{,}7 \\ 17{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -17{,}7 \\ -17{,}7 \\ 21{,}65 \end{pmatrix}$$

Normalenform von E_2:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 21{,}65 \\ 17{,}7 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 17{,}7 \\ 17{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Winkel zwischen E_1 und E_2:

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 21{,}65 \\ 0 \\ 17{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 21{,}65 \\ 17{,}7 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 21{,}65 \\ 0 \\ 17{,}7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 21{,}65 \\ 17{,}7 \end{pmatrix}\right|}, \text{ also } \beta \approx 66{,}4°$$

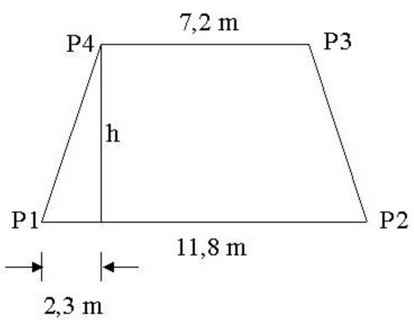
Der Innenwinkel zwischen den beiden Seitenflächen ist der Supplementwinkel zu β, also $180° - \beta \approx 113{,}6°$.

b) $P_1(17{,}7/-5{,}9/0)$; $P2(17{,}7/5{,}9/0)$; damit $\left|\overline{P_1P_2}\right| = 11{,}8$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 17{,}7 \\ -17{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -17{,}7 \\ 17{,}7 \\ 21{,}65 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}9 \\ -5{,}9 \\ 14{,}4 \end{pmatrix}, \text{ also } R(5{,}9/-5{,}9/14{,}4)$$

Entsprechend: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BE} \approx \begin{pmatrix} 5{,}9 \\ 5{,}9 \\ 14{,}4 \end{pmatrix}$, also

$S(5{,}9/5{,}9/14{,}4)$



Gleichung der Geraden P_1S:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 17{,}7 \\ -5{,}9 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 11{,}8 \\ -11{,}8 \\ -14{,}4 \end{pmatrix}$$

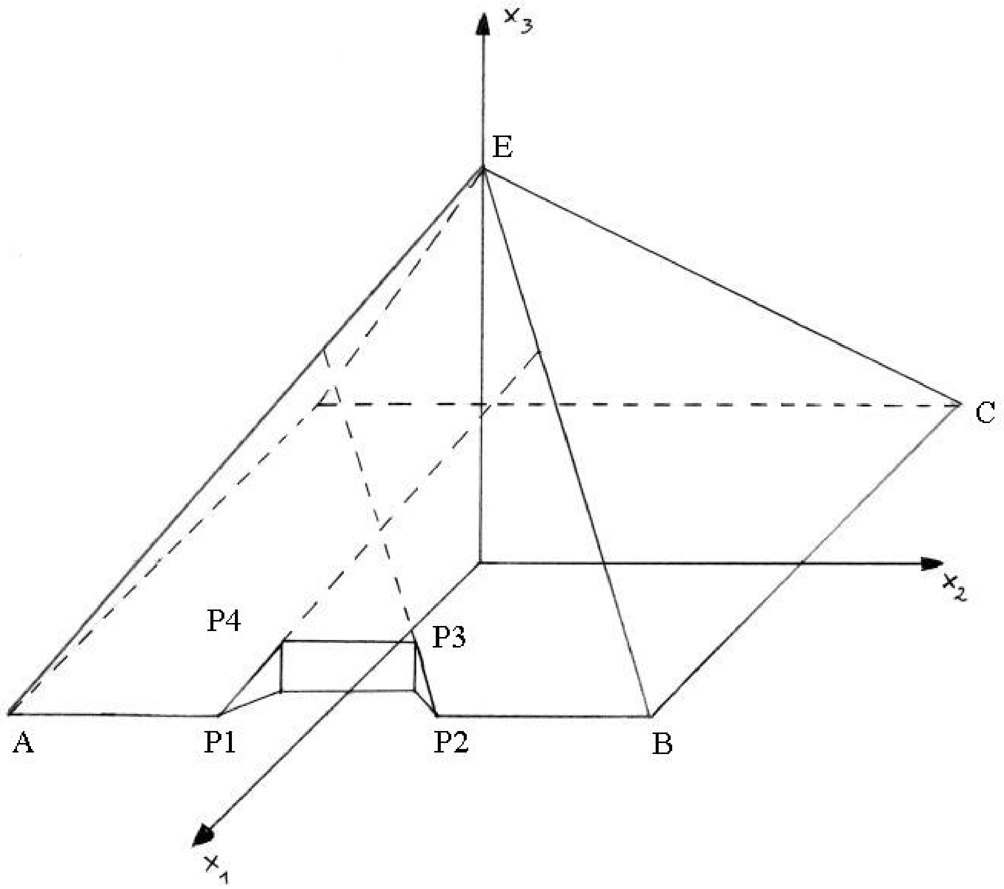
P_4 mit $x_3 = 2{,}8$ liegt auf der Geraden P_1S, also –

$14{,}4k = 2{,}8$, damit $k \approx -0{,}194$ und
$P_4(15{,}4/-3{,}6/2{,}8)$
Aus Symmetriegründen gilt dann: $P_3(15{,}4/3{,}6/2{,}8)$
Damit ergeben sich folgende Maße der Eingangsöffnung $P_1P_2P_3P_4$:
Länge der parallelen Seiten
$\left|\overline{P_1P_2}\right| = 11{,}8$ m; $\left|\overline{P_3P_4}\right| = 7{,}2$ m
Höhe des symmetrischen Trapezes:

$\left|\overline{P_1P_4}\right|^2 = 2{,}3^2 + h^2$, also $h \approx 3{,}6$

Trapezhöhe: 3,6 m

c)



Fläche des Dreiecks ABE:

Für die Höhe des Dreiecks gilt: $h_{Dreieck} = \sqrt{21{,}65^2 + 17{,}70^2} \approx 28{,}0$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot h_{Dreieck} \approx 494{,}97$

Fläche der nicht verglasten Eingangsöffnung: $A_{Trapez} = \approx \frac{1}{2} \cdot (7{,}2 + 11{,}8) \cdot 3{,}6 \approx 34{,}2$

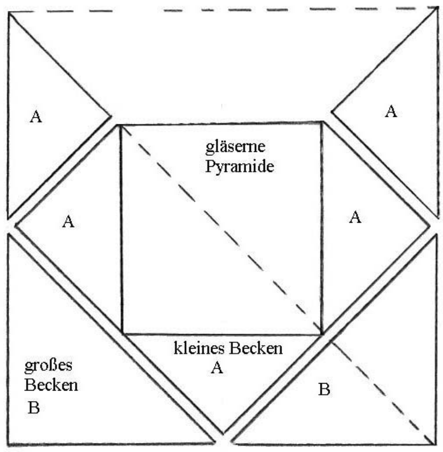
Damit beträgt die gesamte verglaste Fläche $4 \cdot A_{Dreieck} - A_{Trapez} \approx 1945{,}68\ m^2$.

d) Bei der Louvre-Pyramide: Verhältnis $\frac{\text{Pyramidenhöhe}}{\text{Grundkante}} \approx 0{,}612$

Bei der Cheops-Pyramide: Verhältnis $\frac{\text{Pyramidenhöhe}}{\text{Grundkante}} \approx 0{,}636$

Man kann annähernd von gleichen Proportionen ausgehen, umso mehr, als die ursprünglichen Maße der Cheops-Pyramide nur geschätzt sind.

e) Die gläserne Pyramide ist auf der quadratischen Fläche auf drei Seiten von 7 Wasserbecken umgeben, die vierte Pyramidenseite mit dem Eingang ist frei von Wasserbecken.



Es gibt zwei größere kongruente Becken (B), die fünf restlichen kleineren Becken (A) sind ebenfalls kongruent.

- Für die kleineren Becken gilt:
  Die Basislänge entspricht der Länge der Pyramidengrundkante a = 35,40 m.
  Die Schenkellänge ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras zu $s_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 25{,}03$ m

  Für die Dreieckshöhe gilt: $h_1 = \frac{a}{2} = 17{,}70$ m

- Für die beiden größeren Becken gilt:
  Basislänge $a_2 = 2 \cdot s_1 = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{2}} = a \cdot \sqrt{2} \approx 50{,}06$ m

  Schenkellänge $s_2 = s_1 \cdot \sqrt{2} = a = 35{,}40$ m

  Dreieckshöhe: $h_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = s_1 \approx 25{,}03$ m

Damit erhält man die Diagonale der quadratischen Grundfläche:

$d = 2 \cdot s_1 + 4 + d_{Pyramidengrundfläche} = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} + 4 + a \cdot \sqrt{2} = 4 + 2a \cdot \sqrt{2} \approx 100{,}53$

Für die Seitenlänge b der quadratischen Grundfläche gilt dann:

$b = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4 + 2a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2a \approx 73{,}63$ m