Lage zweier Ebenen

Die Ebenen werden für alle Rechnungen immer in die Koordinatenform (Normalenform) gebracht.

Für die gegenseitige Lage von
E_1: $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_4=0$ und
E_2: $m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4=0$ gilt:

$E_1 = E_2$ wenn $n_1=m_1 \wedge n_2=m_2 \wedge n_3=m_3 \wedge n_4=m_4$ gilt.

Beispiel

$6x_1 + 8x_2 - 2x_3 -16 = 0$
$\underline{3x_1 - 4x_2 + x_3 + 8 = 0}$ $|\cdot(-2)$
$6x_1 + 8x_2 - 2x_3 -16 = 0$
$6x_1 + 8x_2 - 2x_3 -16 = 0$

$E_1 \parallel E_2$ wenn nach der Umformung $n_1=m_1 \wedge n_2=m_2 \wedge n_3=m_3 \wedge n_4 \neq m_4$ gilt.

Beispiel

$3x_1 - 8x_2 + 4x_3 -16 = 0$ $|\cdot(-2)$
$\underline{6x_1 +16x_2 - 8x_3 - 2 = 0}$
$6x_1 +16x_2 - 8x_3 + 32 = 0$
$6x_1 +16x_2 - 8x_3 - 2 = 0$ E1 und E2 sind echt parallel

E1 und E2 schneiden sich,
wenn n_i und m_i (i=1,2,3) nicht paarweise übereinstimmen.
Alle Punkte, die sowohl zu E_1 als auch zu E_2 gehören liegen auf einer Geraden, der Schnittgeraden. Die Schnittgerade einer Ebene mit einer Koordinatenebene heißt Spurgerade.

Beispiel

E_1: $2x_1 + x_2 -2x_3 - 3 = 0$
$\underline{E_2: \quad x_1 - x_2 +3x_3 = 0}$

Die zwei Gleichung besitzen drei Variable, also kann eine frei gewählt werden, z.B. $x_1 := s$. Eingesetzt in die Gleichungen von E_1 und E_2 wird

(1) $2s + x_2 -2x_3 - 3 = 0$ +
$\underline{(2) \quad s - x_2 +3x_3 = 0}$

(2) + (1)

(1) $3s + x_3 - 3 = 0$ $\Rightarrow x_3 = 3 - 3s$ in (2)
$\underline{(2) \quad s - x_2 + 3(3-3s) = 0}$ $\Rightarrow x_2 = 9 - 8s$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0 + s\cdot 1 \\ x_2=9-s\cdot(-8) \\ x_3=3+s\cdot(-3) \end{array}\right\} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Gleichung der Schnittgeraden

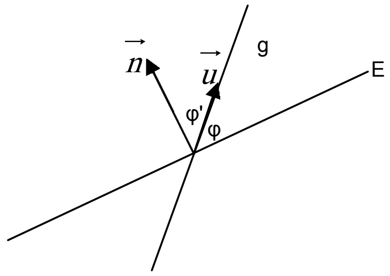
Schnittwinkel zweier Ebenen

Unter dem Schnittwinkel zweier Ebenen versteht man den spitzen Winkel φ, den die Normalenvektoren miteinander einschließen. Es gilt:

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n_1} * \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} \right|$$

Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene

Unter dem Schnittwinkel φ einer Geraden mit einer Ebene versteht man den Winkel, der den spitzen Winkel φ’ zwischen den Richtungsvektor der Geraden g und dem Normalenvektor der Ebene zu 90° ergänzt. Es gilt:

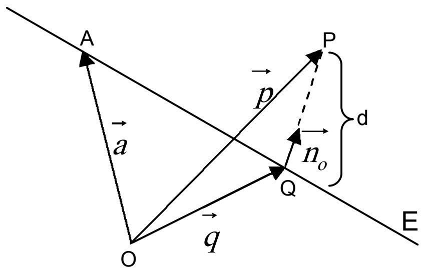


$$\cos\varphi' = \left| \frac{\vec{u} * \vec{n}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} \right|, \qquad \varphi = 90^\circ - \varphi' = \sin\varphi = \left| \frac{\vec{u} * \vec{n}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} \right|$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Normalenform der Ebenengleichung: $\vec{n} * \vec{x} - \vec{n} * \vec{a} = 0$

$\vec{n_o}$ ist ein Normalenvektor der Länge 1: $\vec{n_0} = \frac{1}{\left|\vec{n}\right|} \cdot \vec{n}$



Ebenengleichung : $\vec{n_0} * \vec{x} - \vec{n_0} * \vec{a} = 0$.

$$\overrightarrow{QP} = d \cdot \vec{n_0} = \vec{p} - \vec{q} \Rightarrow \vec{q} = \vec{p} - d \cdot \vec{n_0}$$

Q ist ein Punkt von E, also gilt:

$$\vec{n_0} * \vec{q} - \vec{n_0} * \vec{a} = 0$$
$$\vec{n_0} * (\vec{p} - d \cdot \vec{n_0}) - \vec{n_0} * \vec{a} = 0$$
$$\vec{n_0} * \vec{p} - d \cdot \underbrace{\vec{n_0} * \vec{n_0}}_{1} - \vec{n_0} * \vec{a} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad d = \vec{n_0} * \vec{p} - \vec{n_0} * \vec{a}}$$