M11 Anwenden der Differentialrechnung 26.11.2005 / pl

1) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=-0{,}5x^3 + 2x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

a) *Untersuche das Verhalten der Funktion im Unendlichen!*

$$\lim_{x\to\infty} -x^3(0{,}5-\frac{2}{x}) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} -x^3(0{,}5-\frac{2}{x}) = \infty$$

---

b) *Untersuche den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse und lokale Extrempunkte!*

Untersuchung auf Schnittpunkte mit der x-Achse(Nullstellen): f(x) = 0

$0 = -0{,}5x^3 + 2x^2$

$0 = x^2(-0{,}5x + 2) \quad \Rightarrow x_{01}=0 \lor 0 = -0{,}5x_{02}+2 \Leftrightarrow x_{02}= 4$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $S_1(0|0)$ und $S_2(4|0)$

---

c) *Weise ohne Zuhilfenahme der 3. Ableitung nach, das f genau einen Wendepunkt besitzt und berechne dessen Koordinaten!*

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt: f''(x) = 0:

$f''(x) = -3x + 4 \qquad f''(x) = 0$

$0 = -3x_W+4 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = \frac{4}{3}$;

Wegen $-3x+4>0$ für $x \in]-\infty ; 4/3[$ und $-3x + 4 <0$ für $x \in]4/3 ; \infty[$ wechselt f'' beim Fortschreiten von links nach rechts das Vorzeichen von + nach -. f besitzt daher nur an der Stelle x_W einen Wendepunkt:

$f(4/3)=-0{,}5*(4/3)^3+2*(4/3)^2=\frac{64}{27}$; $\qquad W(\frac{4}{3} \mid \frac{64}{27})$

---

d) *Stelle die Gleichungen der Wendetangente t_w und der Wendenormalen n_w auf!*

$W(\frac{4}{3} \mid \frac{64}{27})$ ist ein Punkt der Wendetangente $t_W(x)=f'(x_W)(x-x_W)+y_W$.

Mit $f'(\frac{4}{3}) = -\frac{3}{2}*(\frac{4}{3})^2 + 4*(\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}$ ergibt sich $\qquad t_W(x)=\frac{8}{3}x-\frac{32}{37}$.

Die Normale der Wendetangente im Wendepunkt hat die Steigung $-\frac{3}{8}$. Damit lautet ihre Gleichung $\qquad t_N(x) = -\frac{3}{8}(x-\frac{4}{3})+\frac{64}{27} = -\frac{3}{8}x+\frac{155}{54}$

---

e) *Eine Gerade g verläuft parallel zur Tangente t und schneidet den Graphen von f im Punkt P(3;f(3)). Gib eine Funktionsgleichung für g an!*

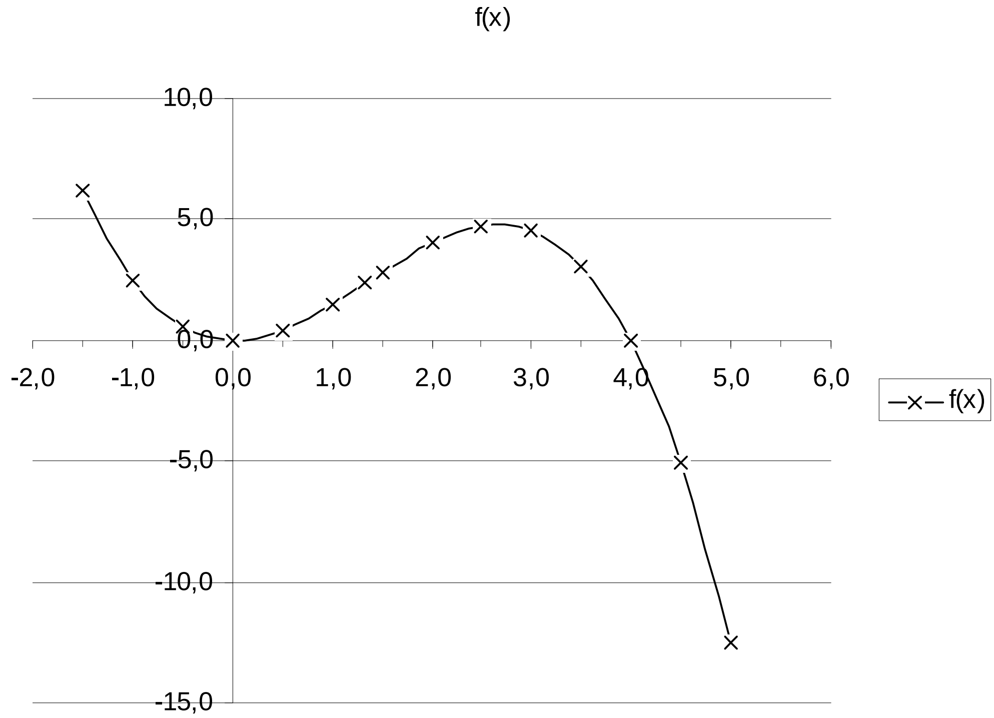
g besitzt dieselbe Steigung wie t_W und verläuft durch den Punkt (3;f(3)) mit

$f(3) = -0{,}5*3^3 + 2*3^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{8}{3}(x-3) + \frac{9}{2} = \frac{8}{3}x-8 + \frac{9}{2} = \frac{8}{3}x - \frac{7}{2}$.

---

f) ***Skizziere den Graphen von f mindestens im Intervall [-1 ; 4,5]***

x	f(x)
-1,5	6,2
-1,0	2,5
-0,5	0,6
0,0	0,0
0,5	0,4
1,0	1,5
1,3	2,4
1,5	2,8
2,0	4,0
2,5	4,7
3,0	4,5
3,5	3,1
4,0	0,0
4,5	-5,1
5,0	-12,5



2) ***Bestimme den Funktionsterm eines Polynoms dritten Grades, dessen Graph durch den Koordinatenursprung verläuft und im Punkt (1;0) einen Wendepunkt besitzt. Die zugehörige Wendetangente ist parallel zur Geraden g: 2y+2x-8=0.***

Allgemeine Funktionsgleichung: fx) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$;
1. Ableitung f'(x)=$3ax^2 + 2bx + c$
2. Ableitung f''(x) = $6ax + 2b$

(1) Der Graph verläuft durch den Koordinatenursprung: f(0) = 0
(2) Der Punkt P(1;0) gehört zum Graphen: f(1) = 0
(3) Hier besitzt der Graph einen Wendepunkt: f''(1) = 0
(4) Die Wendetangente hat wie die Gerade g die Steigung -1: f'(1) = -1

(1) 0 = d
(2) 0 = 2b
(3) 0= a + c
(4) -1 = 6a $\Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow c = \frac{1}{6}$

Daraus ergibt sich f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$.

3) Welches Rechteck mit dem Flächeninhalt 64 cm^2 hat den kleinsten Umfang?

Lösung I:

Es gilt Umfang U=a+b, Flächeninhalt A=a·b= 64 ⇔ b= $\frac{64}{a}$.

Wir ersetzen in der Umfangsgleichung b und erhalten U = a + $\frac{64}{a}$.

U soll minimal werden, deshalb bilden wir die 1. Ableitung und untersuchen

U'(a) = 0 = 1 - 64 · $\frac{1}{a^2}$. Die ist nur der Fall für a = -8 (entfällt) oder a = 8.

Lösung II:

a	b = 64/a	a+b	u=2(a+b)
0	keine Lösung		
1	64	65	130
2	32	34	64
3	64/3	24 1/3	48 2/3
4	16	20	40
5	64/5	17 4/5	35 3/5
6	64/6	16 2/3	33 1/3
7	64/7	16 1/7	32 2/7
8	8	16	32
9	64/9	16 1/9	32 2/9
10	64/10	16 2/5	32 4/5

Für a = 8 hat der Umfang vermutlich ein Minimum.