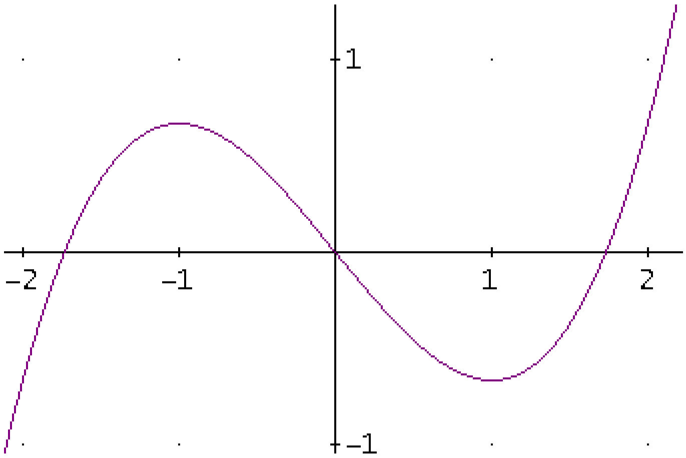
Differentialrechnung

LS Seite 73 Nr 8b :Berechne für g(x)= $\frac{1}{3}$ x^3-x : g(0); g(-1); g($\sqrt{2}$ Lösungen

$$g(x) := \frac{1}{3} \cdot x^3 - x$$



Bestimmung der Gleichung für den Differenzenquotienten mit **Derive**:

(Ersetze g(x+h) durch $\frac{1}{3}$ $(x+h)^3$-(x+h) und g(x) durch $\frac{1}{3}$ x^3-x)

$$\mathrm{DiffQuot}(x) := \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$\mathrm{DiffQuot}(x) := \frac{3 \cdot x^2 + 3 \cdot h \cdot x + h^2 - 3}{3}$$

Lösung für g(0), d.h. Für x wird im Folgenden null eingesetzt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{DiffQuot}(0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^2 - 3}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 3}{3}$$

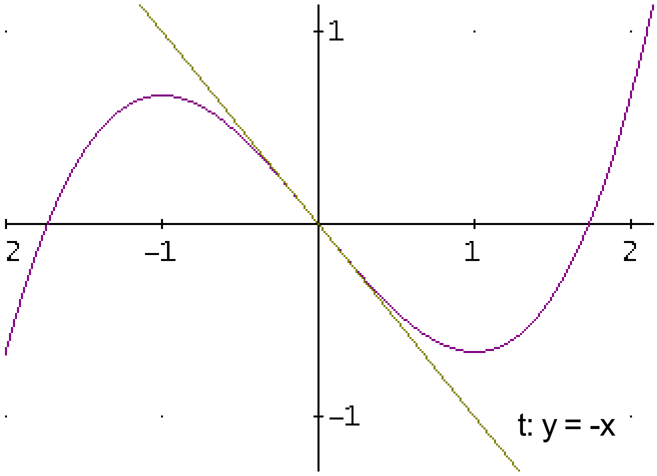
$$\frac{dy}{dx} = -1$$

Der Differentialquotient ergibt die Tangentensteigung.

Gleichung der Tangente durch (0/g(0)) PuSteiFo

$$\frac{y - 0}{x - 0} = -1$$

$$y = -x$$



Lösung für g(-1), d.h. Für x wird im Folgenden (-1) eingesetzt:

Tangentensteigung im Punkt (-1/g(-1))

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{DiffQuot}(-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h - 3)}{3}$$

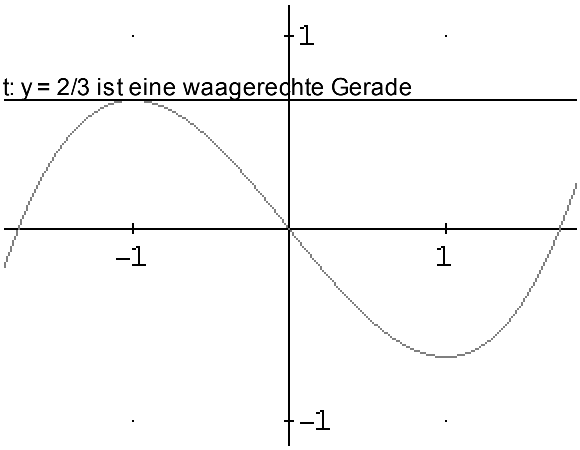
$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Tangentengleichung im Punkt (-1/g(-1)

$$\frac{y - g(-1)}{x + 1} = 0$$

$$\frac{3 \cdot y - 2}{3 \cdot (x + 1)} = 0$$

$$y = \frac{2}{3}$$



Lösung für g($\sqrt{2}$), d.h. Für x wird im Folgenden $\sqrt{2}$ eingesetzt:

Tangentensteigung im Punkt $(\sqrt{2}/g(\sqrt{2}))$

$$A := [\sqrt{2},\ g(\sqrt{2})]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{DiffQuot}(\sqrt{2})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^2 + 3\cdot\sqrt{2}\cdot h + 3}{3}$$

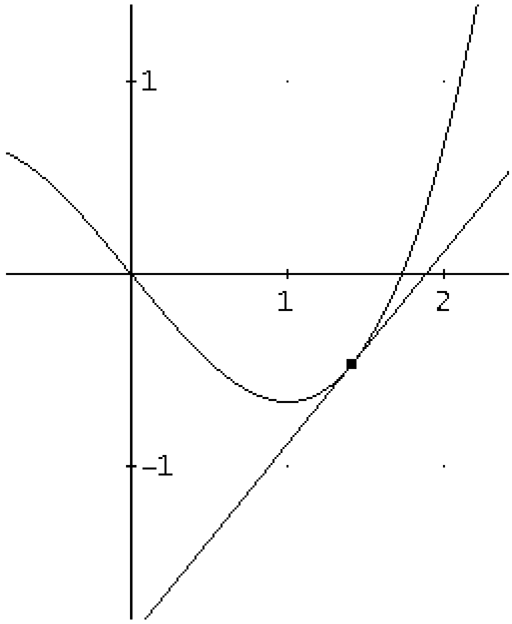
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 3\cdot\sqrt{2}\cdot h + 3}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Tangentengleichung durch Punkt $(\sqrt{2}/g(\sqrt{2}))$

$$\frac{y - g(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = 1$$

$$y = \frac{3\cdot x - 4\cdot\sqrt{2}}{3}$$



Lösung für $g(x_0)$, d.h. Für x wird im Folgenden x_0 eingesetzt:

Tangentensteigung im Punkt (Xo/g(Xo))

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot h \cdot x_0 + h^2 - 3}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot h \cdot x_0 + h^2 - 3}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = x_0^2 - 1$$

Tangentengleichung durch Punkt (x↓0/g(x↓0))

$$\frac{y - g(x_0)}{x - x_0} = x_0^2 - 1$$

$$y = -\frac{2 \cdot x_0^3 - 3 \cdot x \cdot x_0^2 + 3 \cdot x}{3}$$

Statt h(t) wird aus „Derivetechnischen“ Gründen f(x) benutzt!
Lösung für f(0). Für x wird im Folgenden null eingesetzt.

Aufgaben 8c

$$f(x) := \frac{2 \cdot x}{x^2 + 4}$$

Differenzenquotient

$$\mathrm{DiffQuot}(x) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\mathrm{DiffQuot}(x) := - \frac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot h \cdot x - 8}{(x^2 + 4) \cdot (x^2 + 2 \cdot h \cdot x + h^2 + 4)}$$

Tangentensteigung im Punkt (0/f(0))

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{DiffQuot}(0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{h^2 + 4}$$

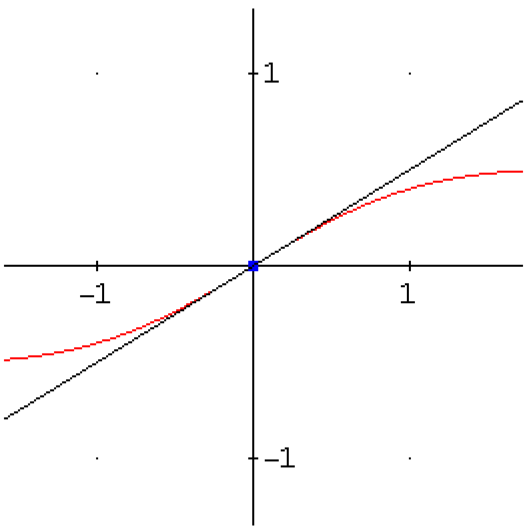
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{h^2 + 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

Tangentengleichung durch Punkt C(0/0)

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2}$$



Weitere Lösungen ohne Tangentengleichungen

Lösungen für −2; 1/3; √2

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \text{DiffQuot}(-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \text{DiffQuot}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.4601899196$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \text{DiffQuot}(\sqrt{2})$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.1111111111$$